

$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$12 \times 8 + 2 = 98$$

$$123 \times 8 + 3 = 987$$

$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$



Sisällys

Matematiikan osaajia tarvitaan	2
Matematiikka on helppoa	3
Matematiikan osaamisen taso huolettaa	4
Kun Suomi teki Kansainvälisistä matematiikka-olympialaisista kansainväliset	6
Matematiikkaa Päivölän tapaan	11
Matematiikan osaaminen Suomessa 30 vuoden aikana	14



Matematiikan osaajia tarvitaan

”Matematiikka on helppoa”, kirjoittaa lehden ensimmäisessä artikkelissa Heikki Kauppi, Tekniikan akateemiset TEK ry:n toiminnanjohtaja. Näin voin itsekin todeta, kun olen alasteelta lähtien nauttinut matematiikan hyödyntämisestä erilaisissa tapauksissa. Lasse Paa-janen pitkän kokemuksensa mukaisesti tietää, että matematiikan osaajia tarvitaan.

Suomi on menestynyt matematiikan sanoman eteenpäin viemisessä, kuten voimme tode-ta, Matti Lehtisen artikkelin ”Kun Suomi teki Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisis-ta kansainväliset”, mukaisesti. Filosofian tohtori ja Helsingin yliopiston tutkijatohtori Liisa Näveri on tarkastellut suomalaista matematiikan osaamista 30 vuoden aikana. Päivölän matematiikkalinjan johtaja Merikki Lappi kertoo vielä, miten matematiikkaa on opiskeltu Päivölässä.

Tämän vuoden kolmas lehti on matematiikka -teemanumero, joka käsittelee matematiikan merkitystä useasta eri näkökulmasta ja esittelee mielenkiintoisesti myös matematiikan historiaa.

MAL syyspäivät järjestetään jälleen ensi vuonna Päivölässä, vaikka ne harmillisesti jouduttiin tänä syksynä perumaan vähäisen osallistujamäärän vuoksi.

Toivottavasti viihdytte lehtemme parissa. Ja tulette mukaan MAL – toimintaan, esimer-kiksi MALin klubi-illat jatkuvat kuukausittain.

MAL – tapahtumia voi seurata verkkosivustollamme <http://mal-liitto.fi/fi/kalenteri>

Mukavia kynttilän valoisia marraskuun iltoja

Toivottavasti nähdään MALin tapahtumissa!

*Pirjo Silius-Miettinen
MAL Tiedottaja*



Matematiikka on helppoa

$$(-3)^2 = -9 \text{ (sic!)}$$

Tätä mieltä oli Liisa Näverin tutkimuksen mukaan 32 prosenttia peruskoulun yhdeksäsluokkalaisista vuonna 2003. Monivalintakysymyksessä oli tarjolla muitakin vääriä vaihtoehtoja ja oikein vastasi noin 400 oppilaan näytteestä alle puolet. Vielä 1980-luvulla oikean vastauksen osasi valita 71 prosenttia silloisesta koejoukosta.

Muut yksinkertaiset, matematiikan perusasioiden osaamista kartoittavat testikysymykset eivät menneet sen paremmin. Tulos on uskomattoman surkea maalle, joka paistattelee kerta toisensa jälkeen peruskoululaisten osaamista mittaavan PISA-tutkimuksen kärkipaikoilla. Tuskaa lisää tietoisuus siitä, että tutkimusten välillä kuluneiden 20 vuoden aikana useat eri organisaatiot, joukossa TEK ja MAL, ovat tehneet paljon työtä nuorison kiinnostuksen herättämiseksi matematiikkaan ja luonnontieteisiin.

Henkilökohtaisesti pidän oppimistulosten huononemista kummallisena, koska matematiikka on mielestäni peruskoulun ja lukion helpoin oppiaine. Näin siksi, että ainakin koulu-matematiikan hallitsemiseksi riittää melko harvojen perusasioiden ymmärtäminen, minkä lisäksi tarvitsee muistaa ulkoa muutama kaava.

Esimerkiksi trigonometriassa pääsee pitkälle sillä, että ymmärtää yksikköympyrän olemuksen ja muistaa, että sinikäyrä kulkee origon kautta. Näiden kahden perusasian avulla pystyy palauttamaan mieleen kaiken tarpeellisen. Lisäksi täytyy olettaa, että pohjalla on periaatteessa yhtä yksinkertainen perusymmärrys geometriasta ja algebrasta.

Erityisesti muistia matematiikka rasittaa mitättömän vähän. Puhuaakseen mitä tahansa kieltä edes siedettävästi täytyy muistaa ainakin 5000 sanaa ja hallita suurempi määrä kaavoja kuin matematiikassa. Toisin kuin matematiikassa, kieliopin kaavoja pystyy harvoin edes johtamaan toinen toisistaan. Lisäksi pitää muistaa epälukuinen määrä poikkeuksia, joita matematiikassa ei ole ensimmäistäkään.

Pedagoginen kokemukseni on suppea ja koostuu yksittäisille oppilaille annetusta matematiikan tukiopetuksesta. Rohkenen kuitenkin väittää, että kehuissa oppimistuloksissa on ainakin osaksi kysymys siitä, että oppilaille ei ole huomattu kertoa, kuinka yksinkertaista ja helppoa koulumatematiikka pohjimmiltaan on. Ainakin minun opettamiani ihmisiä on auttanut eteenpäin tieto siitä, että ollaan tekemisissä varsin tavanomaisella järjellä ymmärrettävissä olevan asian kanssa.

Matematiikan vaikeutta todistelevaa puhetta kuulee paljon enemmän. Jopa matematiikan opettajat saattavat kannustaa oppilaitaan ahkeruuteen kertomalla, kuinka vaativasta oppiaineesta onkaan kysymys. Luulen, että tämä johtaa vääränlaiseen kunnioitukseen matema-

tiikkaa kohtaan. Kun sitä pidetään vaikeana, sitä pelätään ja siihen suhtaudutaan vähän samalla tavalla kuin vanhaan, ankaraan sukulaistäitiin, jonka kanssa ei kerta kaikkiaan osata olla luontevasti.

Lopetetaan siis kaikki puhe matematiikan vaikeudesta ja korostetaan sen sijasta matematiikan ylivoimaista selkeyttä kaikkiin muihin oppiaineisiin verrattuna!

*Heikki Kauppi
Toiminnanjohtaja
Tekniikan akateemiset TEK*



Matematiikan osaamisen taso huolettua

Tekniikan akateemiset TEK ry:n valtuusto hyväksyi viime talvella valtuustoaloitteen, jossa todetaan, että tällä hetkellä on pulaa matemaattis-luonnontieteellisten alojen osaajista. Samalla valtuusto päätti, että TEKin tulee suunnitella ja toteuttaa yhdessä muiden toimijoiden kanssa peruskoululaisille suunnattua toimintaa, jonka tavoitteena on innostaa koululaisia opiskelemaan matemaattis-luonnontieteellisiä aineita.

Verkossa ilmestyy Matematiikkalehti Solmu, se on kaikkien ilmaiseksi luettavissa. Lehden kotisivulla kohdassa Ajankohtaista, (solmu.math.helsinki.fi/2011/maol.pdf) on avoin kirje Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitolle, MAOL ry:lle. Kirjeessä on 200 allekirjoittajaa. He ovat professoreita, lehtoreita, opettajia ja tutkijoita yliopistoista, ammattikorkeakouluista ja lukioista eri puolilta Suomea. Kirjeessä todetaan, että lukion matematiikka ei anna riittäviä valmiuksia niille opiskelijoille, jotka jatkavat matemaattisilla, teknisillä ja luonnontieteellisillä aloilla yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa. Avoimessa kirjeessä kerrotaan muun muassa, että Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoston puheenjohtaja professori Juha Kinnunen on todennut joidenkin teknillisten yliopistojen ja -tiedekuntien rekrytointipohjan pettäneen. Edelleen kirjeessä mainitaan, että dosentti Matti Lehtinen on tarkastellut syksyn 2010 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tuloksia ja todennut, että ”panos-tuotosmielessä tarkasteltuna matematiikan opetus on valtakunnan onnettomimpia toimialoja”. Todellakin, kun kokeen alkupään tehtävät olivat aivan mekaanisia laskuja ja kun kokeesta jouduttiin päästämään läpi vain seitsemällä pisteellä (max 60), niin on syytä pysähtyä miettimään, onko opetuksen järjestämisessä jotakin rakenteellisesti pielesä. Arvosanojen prosenttijakautumasta ja kokeen nykyisestä vaativuustasosta voi päätellä, että matematiikan osaajista on todellinen puute kaikissa korkeakouluissa ja yliopistoissa. Kirjeen allekirjoittajien mukaan MAOL on matematiikan kouluasioiden osalta yksi vaikutusvaltaisimmista asiantuntijaelimistä, joiden armoilla päättäjät ovat. Siksi kirjeessä suositellaankin MAOL:lle joitakin toimenpide-ehdotuksia, joita sen pitäisi ajaa ongelmiin ratkaisemiseksi. Avoin kirje ehdotuksineen ja MAOL:n vastaus siihen ovat luettavissa verkossa Matematiikkalehti Solmun kotisivulla.

Matemaattis-luonnontieteellisten alojen Akateemiset MAL ry on myös huolestunut maamme matematiikan ja luonnontieteiden tietämyksen ja osaamisen tasosta sekä sen vaikutuksesta maamme teknis-taloudelliselle ja tieteelliselle kehitykselle. Suomessa on asiaa viime vuosikymmeninä kyllä käsitelty monissa forumeissa. Vuonna 1987 nimitettiin Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitea, joka tunnettiin puheenjohtajansa mukaan Leikolan komiteana. Sen jälkeen 1996 perustettiin opetusministeriössä ns. LUMA-kehityshanke, jota opetushallitus työsti LUMA-talkoina. Suomen Akatemiassa käynnistettiin MALU-2002 tutkimusohjelma. Opetushallituksessa toimi Matematiikan ja luonnontieteiden neuvottelukunta, sen muistio julkaistiin vuonna 2009. Kaikista komiteoista ja neuvottelukunnista huolimatta näiden aineiden osaaminen on kuitenkin huonontunut. Koululaisten matematiikan osaamisen muutoksia on tutkinut filosofian tohtori Liisa Näveri. Tässä lehdessä hän kirjoittaa artikkelissaan miten osaaminen on muuttunut Suomessa 30 vuoden aikana ja miten hän on sitä selvittänyt.

Millä keinoin kehityksen suunta saataisiin muuttumaan? Monet tahot näkevät ongelmat samoin, mutta eikö sitten ongelmien ratkaisemiseksi löydy yhteisesti hyväksytyjä toimenpiteitä. Olisiko esimerkiksi mahdollista, että järjestettäisiin sellainen tilaisuus, jossa olisi mukana asioista päättävien ja päätöksiä valmistevien virkamiesten lisäksi päätöksiä käytännössä toteuttavia opetusalan ammattilaisia koulutuksen kaikilta tasoilta ja elinkeinoelämän sekä matemaattis-luonnontieteellisten järjestöjen edustajia. Voisiko tällaisen joukon keskusteluissa löytyä ongelmien ratkaisemiseksi sellaisia toimenpiteitä, joita kaikki sitoutuisivat toteuttamaan?

*Lasse Paaajanen
Lukion rehtori
Matematiikan opettaja
Helsinki
Eläkkeellä*



Kuva: FutureImagebank.fi



Kun Suomi teki Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista kansainväliset

Matematiikkakilpailujen esihistoriaa voi seurata vuosisatojen taakse, vaikkapa vuoteen 1535, kun Niccolo Tartaglia päihitti Antonio Maria Fiorin 30 – 0 kuuluisassa ottelussa, jossa ratkaistiin riita siitä, kumpi herroista osaa ratkaista kolmannen asteen yhtälön. Nykyään matematiikkakilpailut mielletään ennen muuta koululaisille tarjotuksi hyväksi harrastukseksi, tavoitteena tehdä matematiikka oppiaineena kaikille kiinnostavammaksi ja samalla luoda keino matemaattisesti etevämpiä oppilaiden mielenkiinnon ylläpitämiseksi. Tässä mielessä kilpailut sysäsi alkuun Unkari: siellä perustettiin vuonna 1894 koululaiskilpailu juhlistamaan sitä, että fyysikko Lorand Eötvös oli valittu Unkarin opetusministeriksi.

Matematiikkaolympialaiset koululaisten matematiikkakilpailun nimeksi keksittiin Leningradissa vuonna 1934. Toisen maailmansodan jälkeen erityisesti sosialististen maiden keskusjohtoisten opetusjärjestelmien osaksi muodostuivat moniportaiset matematiikkakilpailut, jotka itse kussakin maassa huipentuivat kansallisiin loppukilpailuihin. Oli aika luonnollinen askel yhdistää nämä kilpailut kansainväliseksi tapahtumaksi. Askeleella on kuitenkin oltava ottajansa. Matematiikkakilpailujen tapauksessa primus motor oli romanialainen matemaatikko Tiberiu Roman, joka organisoisi vuonna 1959 seitsemän Euroopan sosialistimaan yhteisen kilpailun, ensimmäiset Kansainväliset



Poikavaltaisen kilpailijajoukon seuraksi oli kutsuttu tyttöoppilaita berliiniläisestä koulusta. Kuva: Matti Lehtinen

Matematiikkaolympialaiset. Pahat kielet ovat sittemmin kertoneet, että Romanilla oli vaikeuksia saada väitöskirjastaan kunnollista, ja että kilpailujen organisointi olisi ollut hänelle vaihtoehtoinen tie menestykseen. Niin tai näin, Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista tuli menestys, tosin vähitellen.

Nykyään Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset on todella nimensä mukainen kansainvälinen tapahtuma. Osallistujamaita on noin vuosittain noin sata, ja ne edustavat väestöpohjaltaan 85 % maapallon väestöstä. Suurin maa, joka ei osallistu kilpailuihin on Egypti, ja Afrikka on ainoa maanosa, jonka maista suuri osa ei vielä ole mukana. Kansainvälistymisen aloittaja oli hiukan eriskummallistenkin vaiheiden jälkeen Suomi.

Vuonna 1965 oli 7. Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten aika, ja järjestäjävuorossa oli ensi kertaa Itä-Saksa, Saksan Demokraattinen Tasavalta DDR, «harppi-Saksa». Olympialaisten osallistujamaiden joukko oli kasvanut yhdeksään, kun joukkoon olivat liittyneet Jugoslavia vuonna 1963 Puolan järjestämässä olympialaisissa ja Mongolia edellisenä vuoden Moskovan kilpailuissa. Tuota aikaa eläneet muistavat, että Berliinin muuri oli muutaman vuoden ikäinen ja DDR paikka, josta oli tavattoman vaikea päästä pois. Vuonna 1961 oli kuitenkin pari itäsaksalaista matematiikanopettajaa päässyt käymään Suomessa Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton kesäpäivillä Rovaniemellä, ja vierailijoista toinen, Herbert Titze, oli tutustunut MAOLin hallituksessa toimineeseen Pohjois-Tapiolan yhteiskoulun rehtoriin Jarmo Nyströmiin. Titze nousi sittemmin keskeiseen tehtävään matematiikkaolympialaisten järjestelyorganisaatiossa. Hän visioi tilannetta, jossa Kansainvälisten Matematiikkaolympialaisten kansainvälisyys ulottuisi aina kapitalistiseen leiriin saakka. Mahdollinen avaus voisi tapahtua Suomen, länsimaista helpoimmin hyväksyttävän, kautta.

Titze otti kevättälvella yhteyttä Nyströmiin ja tiedusteli Suomen halukkuutta lähettää kilpailujoukkue DDR:n olympialaisiin. Olympialaisten jo vakiintuneen käytännön mukaan järjestäjät kustantaisivat oleskelun DDR:ssä. Nyström kiinnostui asiasta ja ryhtyi selvittämään mahdollisuuksia saada matkarahat Suomesta. Viranomaisten vastaus oli tyyli, matka-avustusta ei myönnettäisi. Niinpä Nyström joutui kirjoittamaan Titzelle, että Suomen osallistuminen ei onnistu. Suureksi hämmästyksekseen Nyström sai paluupostissa lentoliput kahdeksan oppilaan ja kahden johtajan joukkueelle.

Seuraava ongelma oli itse kilpailujoukkue. Suomessa ei tuolloin ollut mitään kilpailua tai muuta mekanismia, jolla edustusjoukkue olisi syntynyt. Kun aikaa ei liiemmälti ollut, Nyström ryhtyi soittelemaan kollegoilleen ja kyselemään mahdollisia matema-

tiikkakilpailijoita. Ja kahdeksan kilpailijaa löytyikin, osa kevään abiturientteja, osa lukion toiseksi ylimmältä luokalta, tämän kirjoittaja yhtenä. Joukkue, jossa tyttöjä ja poikia oli yhtä monta, matkusti Nyströmin johdolla kilpailupaikalle jokseenkin tietämättömänä siitä, mitä tuleman piti. Matka rautaesiripun taakse oli toki jännittävä jo sinänsä. Olin ostanut matkaa varten olkalaukun, jossa oli näkyvä SAS:n logo länsimaalaisuuteni korostamiseksi.



Kilpailupaikkana oli Wilhelm Pieckin mukaan nimetty nuorisokorkeakoulu. Banderollissa lukee: "DDR on kaikkien niiden kansojen puolella, jotka taistelevat rauhan ja demokratian puolesta imperialismia ja kapitalismia vastaan." Kuva: Matti Lehtinen

Kilpailijoiden majapaikaksi ja itse kilpailun pitopaikaksi oli valikoitu DDR:n virallisen nuorisjärjestön Freie Deutsche Jugendin nuorisokorkeakoulu Bogensee -järven rannalla parikymmentä kilometriä Berliinin pohjoispuolella. Vasta vuosia myöhemmin minulle selvisi, että oppilaitos oli rakennettu alkuaan Joseph Goebbelsin huvilan alueelle. Joukkueesta pidettiin hyvää huolta: sitä valvoi sekä suomalainen tulkki että saksalainen huoltaja. Etukäteispelko ruoan niukkuudesta rautaesiripun takana osoittautui aiheettomaksi.

Kilpailun alkua jouduttiin odottamaan muutama päivä, koska joukkueenjohtajista koostuva tuomaristo valitsi ja käänsi tehtäviä Berliinissä. Ehdimme saada pientä käsit-



Suomen joukkuetta Treptowin mahtipontisella muistomerkillä. Oikealta Martti Ollila, Kaisa Holma, Eija Piililä, Kaija-Riitta Laanti, Timo Erkama, tulkki ja Matti Lehtinen. Kuva: Matti Lehtisen arkisto

tystä olympialaisten matematiikasta Leipziger Volkszeitung -nimisen sanomalehden numerosta, joka oli kokonaan omistettu matematiikkakilpailuille ja kilpailutehtäville. Lyhyt valmentautuminen ei oikein kuitenkaan riittänyt tasaveroisen kilpailukunnan saavuttamiseen. Olympialaisten kuudesta tehtävästä ensimmäinen ja helpoin, trigonometrinen epäyhtälö, muistutti jonkin verran koulussa opittuja asioita, mutta muuten tehtävät tuottivat aika lailla ylitsepääsemättömiä vaikeuksia, vaikka ne nykykilpailun tasoon verrattuina olivatkin helponpuoleisia. Kaikkein vaikeimmaksi suomalaisille osoittautui avaruusgeometrian tehtävä, joka tuntui useille muille kilpailujoukkueille olevan aika lailla rutiinia. Suomalaisista vain Timo Erkama, sittemmin Joensuun yliopiston matematiikan professori, onnistui saamaan yhdestä tehtävästä täydet pisteet. Itse muistan olleeni jotenkin löytämäisilläni ratkaisun etukäteen vaikeimmaksi rankattuun tehtävään «Tasossa on $n > 2$ pistettä ja d on näiden välisistä etäisyyksistä suurin. Sellainen joukon kahden pisteen yhdysjana, jonka pituus on d , on joukon halkaisija. Osoita, että halkaisijoita on enintään n kappaletta.» Yritykseni palkittiin kuitenkin vain kahdella pisteellä yhdeksästä mahdollisesta.

Suomen myötä olympialaisten osallistujamaita oli nyt kymmenen. Yhteen laskeutuissa pisteissä parhaat maat olivat Neuvostoliitto, Unkari ja Romania. Mongolia 63



Sanssoucin linna lisärakennuksineen. Etuoikealla profiilikuvassa Timo Erkama. Kuva: Matti Lehtinen

portilla, ihailimme Karjalan Kannaksen graniitista veistettyjä massiivisia punalippuja ja Berliinin valtauksessa kaatuneiden neuvostosotilaiden hautausmaalla Treptowissa ja Fredrik Suuren Sanssouci -linnan Potzdamissa. Teimme vielä laajan kiertomatkan eteläisempään Itä-Saksaan, Weimariin, Buchenwaldin keskitysleirille, Dresdeniin ja Karl-Marx-Stadtiin. Omaa aikaa ei meille suotu ennen kuin kilpailun päättäjäpäivänä Berliinissä. Silloin sain, ilmeisesti vastoin huoltajien ohjeita, katsella tunnin ajan Alexander-Platzin ympäristöä ja kauppoja omin päin. Poliitikka ja valvonta eivät kuitenkaan kaikkea läpäisseet. Kilpailun pääorganisaattori Herbert Titze kurkisti kerran suomalaisia kuljettavan bussin ovesta ja kysyi, mikä on maailman vapain maa. Hän vastasi yllättäen itse, että se on Sveitsi. Siellä on kuulemma vain kaksi lakia: 1) jokainen saa tehdä, mitä haluaa; 2) hänen ei ole pakko tehdä niin. – Kilpailijoiden joukossa oli myös Titzen tytär Monika, matemaatikko myöhemmässä elämässään hänkin. Kun tulin takaisin Suomeen, huomasin rupeavani saamaan kirjeitä saksalaiselta matemaatiikanopiskelijalta. Ehkä olin hänet tavannutkin. Sitä, oliko kyseessä pohjustus Stasiin värväykselle, niin kuin voi epäillä, en ole tullut tietämään. Kirjeenvaihto hiipui pian.

pisteellä yhdeksäs ja Suomelle tuomittiin 62 pistettä. Aivan synkkänä en lopputulosta omalta kohdaltani kuitenkaan voi pitää. Olin toinen, Erkaman jälkeen se huonompi, niistä kahdesta Suomen joukkueen kilpailijasta, jotka pääsivät paremmille pisteille kuin paras mongolialainen. Ja vaikka joukkueen valinta oli ollut perin epädemokraattinen, ei se aivan pielessä ollut. Jäsenistä ainakin neljä väitteli matematiikassa ja kaksi on professoreja, Erkaman lisäksi Aalto -yliopiston kryptologi Kaisa Nyberg, silloinen Holma.

Kilpailutuloksia jouduttiin luonnollisesti odottamaan, olihan kaikki erikieliset vastaukset käytävä huolella läpi. Järjestäjät olivat huolehtineet joukkueiden ajankulusta kiitettävästi. Risteilimme Berliiniin itäpuolisilla järvillä vesibussilla seuranamme paikallisesta koulusta komennettuja oppilaita, näimme muurin Brandenburgin

Mahdollisuuksia keskustella kanssakilpailijoiden kanssa oli, sikäli kuin yhteistä kieltä löytyi. Mieleeni jäi erityisesti unkarilainen Endre Makai, sittemmin varsin nimekäs matemaatikko. En sen sijaan muista tutustuneeni kahteen Makain kanssa tasaveroiseen unkarilaiseen huippukilpailijaan, maineikkaaseen László Lovásziin ja myöhemmin Unkarin olympiajoukkueen johtajana tutuksi tulleeseen József Pelikániin. Lovasz oli vuonna 1982 Unkarissa pidettyjen matematiikkaolympialaisten arvostelijoita. Ihailen edelleen hänen loistavaa hahmotuskykyään. Osaamatta sanaakaan suomea hän pystyi ilman käännöstä heti näkemään suomalaisten kilpailijoiden suorituksen arvon.

Suomen muodostama avaus länteen oli tilapäinen. Seuraavana vuonna kilpailut olivat Bulgariassa ja mukana oli taas vain sosialistimaiden joukkueita. Mutta yhdeksänsiin olympialaisiin Jugoslaviassa vuonna 1967 osallistuivat sitten Ison-Britannian, Ranskan, Italian ja Ruotsin joukkueet. Arvattavasti kutsuja Suomeenkin tuli, mutta ne eivät enää löytäneet Nyströmin kaltaista vastaanottajaa.



*Suomen joukkuetta filmataan Treptowin hautausmaalla.
Kuva: Matti Lehtinen*

Vaasta vuonna 1973 Moskovasta tullut kutsu sai Suomessa vasta-kaikua. Oma nykypäiviin asti jatkunut «urani» matematiikkaolympialaisten liepeillä lähti tuolloin alkuun, taas sattumien saattelemana. Joukkuetta matematiikkaolympialaisiin organisoivat Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto oli päättänyt järjestää joukkueelle parin päivän valmennustilaisuuden ennen kilpailumatkaa. Se kääntyi Suomen matemaattisen yhdistyksen puoleen tiedustellen opettajaa. Yhdistyksen sihteerinä oli tuolloin joukkue- ja työtoverini Timo Erkama, ja hän olisi mielellään lähtenyt valmentajaksi. Timo oli kuitenkin saanut lykkäystä asevelvollisuuden suorittamisesta ja oli lähdössä armeijaan. Hän pyysi sitten minua sijastaan valmennustehtävään. Vuotta myöhemmin olinkin sitten jo Suomen joukkueen johtajana – taas DDR:ssä.

*Matti Lehtinen
FT, dosentti
Helsingin yliopisto*



Matematiikkaa Päivölän tapaan

Tänä syksynä tuli viisitoista vuotta siitä, kun ensimmäiset suoraan peruskoulusta tulleet opiskelijat aloittivat kaksivuotisen Päivölän matematiikkalinjan. Monesti saimme kuulla, että lukion, syvennettyjen matematiikan ja tietotekniikan opintojen ja töiden yhdistäminen ei olisi mahdollista, varsinkaan tuossa ajassa. Liki 300 opiskelijaa myöhemmin voimme olla jo melko varmoja – onnistuu se.

Hitunen historiaa

Linjan perustaja Kullervo Nieminen oli tuuminut monenlaisissa töissään, mitä voisikaan saada aikaan, jos oppilaat olisivat valmiiksi lahjakkaita ja motivoituneita. Hän keksi ajatuksen työelämän ja nopeutetun matematiikan opetuksen yhdistämisestä tavoitteena antaa matemaattisesti suuntautuneille mahdollisuus kehittyä taitojen ja kiinnostuksen rajoissa. Niinpä hän kokosi uupumattomalla lobbaamisella ja innostuksellaan asialleen riittävän kannatuksen ja yhteistyökumppaneiden eli Valkeakosken kaupungin, Nokia Oyj:n ja Päivölän kansanopiston tuen. Siten syntyi ratkaisu, jossa opiskelijalla oli suhde kaikkiin kolmeen toimijaan. Nieminen myös rekrytoi pariskunnan asumaan oppilaiden kanssa – tämän artikkelin kirjoittajat, jotka kouluvuorokausina edelleen asuvat samassa talossa 40 matematiikkateinin kanssa.

Harrastuneille on varsin hyvin mahdollisuuksia suurimmissa kaupungeissa, mutta koko maan kattavan mahdollisuuden tarjoaminen edellyttää sisäoppilaitosympäristöä, jonne voi muuttaa mistä tahansa Suomesta. Sääksmäen maatalousoppilaitoksen lakkauttaminen loi tyhjän koulurakennuksen Päivölänmäelle, ja tyhjiö täyttyi ja tarjosi tilat tietotekniikan ja matematiikan opetukselle majoituksineen.

Tavoite kirikkaana mielessä

Opetuksen tavoite on alusta asti ollut päästä peruskoulusta yliopistoon kahdessa vuodessa. Opetus mitoitettiin matematiikan harrastuslähtökohdasta, jolloin taitoja harjoitettiin musiikki- tai urheilulukion tapaan. Siten syntyivät ensimmäisen kesän kesälukukausi, 12 oppitunnin opiskelupäivät ja joka toisen viikonlopun koulunkäynti. Tämä kovalta tuntuva ohjelma on kuitenkin tehokasta ajankäyttöä, joka torjuu koti-ikäväää ja minimoi matkustamiseen käytetyn ajan. Kahden vuoden opiskeluaikaa opiskelijat pitävät erityisenä valttina.

Juhlapuheissa tavoitteena on jo vuosia ollut opintojen vauhdittaminen ja oppilaitosten välinen yhteistyö. Päivölän matematiikkalinja toteuttaa molemmat. Kolmas juhlapuheiden kestopihhti on työelämän ja opintojen yhdistäminen. Harjoittelu on itsestään selvää ammatillisessa koulutuksessa, miksi ei myös matemaattisilla aloilla. Matematiikkalin-

jan kolmas tukijalka on yhteistyö Nokian kanssa, joka tarjoaa harjoittelumahdollisuuden 20 opiskelijan vuosikurssille 12 tuntia viikossa kahden opiskeluvuoden ajan.

Työharjoittelu Nokialla antaa lisää motivaatiota opintoihin ja työkokemus on kullan arvoista. Työelämävalmiudet kehittyvät ja osaamista kertyy mitä moninaisimmissa projekteissa eri rooleissa toimimisesta. Nokian panostus matematiikkalinjan opiskelijoihin on todellinen onnenpotku, joka käytännössä mahdollistaa opinnot opiskelijan kotitaustasta ja varallisuudesta riippumatta.

Miten sinne pääsee ja miten sieltä pääsee pois?

Opinnot ja hakumenettely kulkevat oman kaksivuotisen kaavansa mukaan. Pääsykoe on jo tammikuussa (viikot 2, 4 tai 6), jotta opiskelija tietää yhteisvalinnassa hakea Valkeakosken Tietotien lukioon. Heti juhannuksen jälkeen alkaa kesälukukausi, jossa on neljä seitsenpäiväistä kouluviikkoa, joiden välissä on kalenteriviikon vapaa. Näistä seitsemästä koulupäivästä viisi käytetään matematiikkaan ja kaksi kaikille pakolliseen tietotekniikkaan. Viimeinen vapaaviikko osuu yleensä muiden koulujen ensimmäiselle kouluviikolle. Tässä on myös mahdollisuus palata tavalliseen kouluun, jos tšekäläinen opiskelutyyli ei jostain syystä sovi tai koti-ikävä osoittautuu ylivoimaiseksi. Lukio-opinnot tulevat tässä vaiheessa mukaan kuvioon. Ensimmäiset ylioppilaskirjoitukset ovat ensimmäisen vuoden keväällä ja urakka päättyy seuraavana keväänä – ylioppilastutkinnossa kirjoitetaan keskimäärin sellaiset 6,5 ainetta. Erityisesti matematiikan tulokset ovat loistavia.

Opetussuunnitelman omittaisuudet

Päivölän matematiikan opetuksessa painotetaan matematiikkaa tieteenä ja matemaattisen tiedon tuotantoprosessia. Siten jo lukujen ja laskutoimisten opetuksessa haetaan kaavojen johtamisen ja todistamisen taitoja. Kun todistaminen on uutta ja vaikeaa, se aloitetaan periaatteessa tutuista asioista. Tämä aiheuttaa osalle kulttuurishokin, joka on parempi kohdata 16-vuotiaiden porukassa kuin yksin 19-vuotiaana yliopiston opiskelija-asuntolassa. Kun aikaa on vähän, opintojen pitää edetä systemaattisesti ja esitiedot pitää miettiä tarkkaan.

Kesän opinnoissa edetään järjestyksessä luvut ja laskutoimitukset (yhteen, vähennys, kerto ja jako, potenssi ja juuri sekä logaritmi) kaavoineen ja todistuksineen ja yhden tai muutaman ratkaisuskelelen yhtälöt, jotka liittyvät laskutoimituksiin. Tätä seuraavat polynomi- ja rationaalilausekkeet ja yhtälöt sekä epäyhtälöt.

Funktiokäsitteen avulla tutustutaan kuvaajiin, kasvavuuteen ja vähenevyyteen sekä differentiaalilaskentaan. Näiden kautta saadaan täydennettyä epäyhtälöiden käsittely ja päästään lukuisiin sovelluksiin. Kesän lopussa kärkiopiskelijat ovat valmiit aloittamaan yliopistomatematiikan, ja fysiikan alkaessa onkin käytössä tarvittava matemaattinen koneisto. Yliopisto-opintoja suoritetaan vaihtelevia määriä matematiikassa ja tietojenkäsittelytieteessä kunkin opiskelijan kiinnostuksen mukaan.

Matematiikka ei ole helppoa. Jos se on helppoa, edetään liian hitaasti. Ammattimatematiikko tietää, että matematiikan viehätys on juuri sen haastavuudessa. Jos viehätys rajoittuu siihen, että olen siinä parempi kuin muut, siitä on tulossa hyvä työkalu, mutta ammatiksi siitä ei ole. On hyvä tietää, kummasta on kyse ennen pitkäjänteisiä yliopistopintoja. Tietotekniikka on erilaista, sen osalta on enemmänkin tarpeen havaita, miten kovin erilaisiin asioihin alan osaamista voi käyttää. Lisäksi ala on sellainen, jossa on aivan erityistä hyötyä vertaistuesta ja verkostoista – siitä, että on keneltä kysyä.

Tutkimustakin on harjoiteltava

IB-tutkinnon extended essayn ja Suomen Akatemian Viksu -tutkielmakilpailun innoittamina ohjelmaan tuli tutkielma, lisäksi innoittajana toimi kokemus siitä, että papereita pääsee opinnoissa kirjoittamaan varsin myöhään – ja on paljon helpompaa kirjoittaa kandidaatintutkielma, kun se ei ole ensimmäinen laatuaan. Meillä tutkielmasta pidetään lisäksi tutkielmaseminaari, jonka arvovaltaisena yleisönä on myös entisiä opiskelijoita, jotkut jo tohtorinhattunsakin ansainneita. Aihevalinta on vapaa ja sen huomaat tuloksista, käsitely on menestyksekkäästi aiheita kuten Nopeuden määrittäminen äänen perusteella, Suomalaiset juniorijalkapallojoukkueet - harjoittelun eroja, Ohjelmointia alakoulussa – viidesluokkalaiset, ohjelmointi ja ongelmanratkaisu, Koulukiusaamisen laskennallinen simulointi, Matemaatikot sisäoppilaitoksessa – minäkäsityksen vertailua tai Alussa oli sana – pelastusoppi saarnoissa.

Tutki-kokeile-kehitä-kilpailu vei tänä vuonna Meri Vainion Intel ISEF tiedetapahtumaan Pittsburghiin (Symbolinen laskin perinteisissä pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa) ja Kiira Saarelan Bratislavaan European Contest for Young Scientistiin (Pöllön myyrästä ja moottoritien melu – laskennallinen malli moottoritiemelun vaikutuksesta pöllön kykyyn havaita saalis kuulonsa avulla). Maailman huipulle on kyllä vielä matkaa. Amerikkalaisesta koululaitoksesta en niin kovin paljon olisi tuomassa maahan, mutta tutkimuksen tekemisen ja erityisesti tutkimuksen esittämisen traditiossa meillä olisi oppimista.

Sosiaaliset kuviot

Tiiviissä opiskelussa syntyy elämänikäisiä ihmissuhteita. Samaan aikaan opiskelevien lisäksi voi tutustua muihin matematiikan harrastajiin matematiikkavalmennuksessa, entisiin opiskelijoihin, joita talossa näkyy usein ja osia kursseistamme suorittaviin muiden koulujen opiskelijoihin. Päivölässä on lisäksi muitakin linjoja, joilla opiskelee hyvin erilaisia ihmisiä. Harrastustoiminta on monipuolista ja opiskelijoiden omista harrastuksista kumpuavaa. Kun matkoihin ei mene aikaa ja kaverit ovat lähellä, vapaa-aikaa on yllättävän paljon. Tätä kirjoittaessani edessäni pelataan äänekkäintä tuntemaani peliä – tandemshakkia. Kun opiskelijat tulevat joka puolelta Suomea hyvin erilaisista kodeista ja ympäristöistä, kokemus on kotimaankin osalta avartava.

*Merikki Lappi
Matematiikkalinjan johtaja
Päivölän opisto*



Matematiikan osaaminen Suomessa 30 vuoden aikana

Artikkelissa käsitellään tarkasteluajanjaksona matematiikan osaamista Suomen peruskoulussa niin kansainvälisten kuin kansallisten arviointien pohjalta. Lisäksi tarkastellaan peruskoulun opetussuunnitelmamuutosten vaikutusta tähän kehitykseen. Tutkimuksen mukaan Suomessa voimassaolevan opetussuunnitelman korostamien prosessien ja strategioiden oppiminen ei korvaa käsitteiden ja toimintojen oppimista. Myös kansainvälisesti on nähtävissä useampia matematiikan opettamisen päälinjoja, jotka artikkelissa tuodaan esille.

Kansainväliset arviointitutkimukset 1960-luvulta-2000-luvulle

Suomalaiset oppilaat ovat olleet mukana erilaisissa kansainvälisissä arviointitutkimuksissa 1960-luvulta lähtien. Ensimmäinen matematiikkatutkimus (FIMS) järjestettiin vuonna 1964. Toiseen matematiikan kansainväliseen koulusaavutustutkimukseen (SIMS) vuosina 1981-1982 osallistujia oli jo 20 maasta. Näissä suomalaisten oppilaiden osaamisen taso on ollut osallistujamaiden keskitasoa. Lähes kaikilla osa-alueilla menestyminen on ollut muihin osanottajamaihin verrattuna heikointa korkeampaa matemaattista ajattelua vaativassa luokassa. Sen sijaan menestyminen on ollut kansainvälistä keskitasoa laskutaitoa mittaavissa tehtävissä. Sama linja on jatkunut 1980-luvulla. Kansallisten ja kansainvälisten arviointien mukaan ajattelua, ymmärtämistä ja soveltamista vaativissa tehtävissä on suurempia puutteita kuin mekaanisten laskutehtävien hallitsemisessa.

Kassel-projektissa tutkittiin vuosina 1993-1996 peruskoulun yläasteen oppilaiden matematiikan osaamista. Kassel-testien tuloksista tehtiin Suomessa erikseen eurooppalainen vertailu, johon Suomen lisäksi osallistuivat Englanti, Kreikka, Norja, Saksa ja Unkari (Soro 1997; Soro & Pehkonen 1998). Tutkituista sisältöalueista algebran ja geometrian testeissä muiden vertailumaiden pistemäärät olivat tilastollisesti merkitsevästi paremmat kuin tilaston häntäpäätä edustaneilla Suomella ja Norjalla. Tutkimuksessa todettiin, että suomalaisilla oppilailla toisen tutkimusvuoden aikana osaaminen kasvoi hitaammin kuin englantilaisilla, saksalaisilla ja unkarilaisilla oppilailla, joilla osaamistason kasvu oli yli puolitoistakertainen suomalaisten oppilaiden osaamiseen verrattuna. Tutkimuksen perusteella suomalaiset oppilaat olivat algebran ja funktioiden osaamisessa noin yhden lukuvuoden jäljessä tutkimukseen osallistuneiden maiden oppilaiden keskiarvosta. TIMMS 1999-tutkimuksessa on tutkittu opetussuunnitelmapohjaista osaamista. Taso 5, mihin sijoitettiin 10 % parhaiten sijoittuneista, kuvasi parasta tasoa ja taso 1 heikointa matematiikan osaamisen tasoa. Tasolle 5 sijoittui Suomen oppilaista 6 %, kun parhaiten menestyneen Singaporen oppilaista sijoittui tälle tasolle 46 %. (Kupari ym. 2001, 23.)

Opetussuunnitelmat muuttuvat

Näihin haasteisiin alettiin Suomessa etsiä ratkaisua kognitiivisen psykologian tarjoamasta näkökulmasta. Vuonna 1985 siirryttiin Suomessa tasokursseista tuntikehysajatteluun tavoitteena antaa kaikille peruskoulun suorittaneille yhtäläiset mahdollisuudet opiskeluun peruskoulutuksen jälkeen. Opetussuunnitelman kehittämistä dynaamisena prosessina korostettiin. Tavoitteena oli ongelmanratkaisun keinoin kehittää ylemmän tason ajattelua.

Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa tämä painotus näkyi matemaattisen ajattelun korostamisena. Tosin se, mitä matemaattisella ajattelulla opetussuunnitelmassa tarkoitettiin, jäi kunkin käyttäjän harkinnan varaan. Tarkoista sisältöluetteloista luovuttiin ja painotettiin oppimista prosessina. Taitoa lukea ja ymmärtää eri muodoissa esitettyä matemaattista informaatiota pidettiin teknistyneessä yhteiskunnassa keskeisessä asemassa, kuten Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994) mainittiin. Samansuuntainen on seuraavassa luvussa tarkasteltavan PISA-arviointitutkimuksen tavoite tutkia matematiikan osaamista matemaattisena lukutaitona, kuten 'mathematical literacy' usein suomennetaan.

Pisa – menestystarina?

PISA (Programme for International Students Assessment) -tutkimusohjelmaan osallistuu suomalaisia yhdeksäsluokkalaisia kolmen vuoden välein. Viimeinen raportoitu on vuodelta 2009. Alussa vuonna 2000 osallistujamaita oli 32, vuonna 2009 jo 65 maata tai aluetta. Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa Suomi oli matematiikassa OECD-maiden paras ja 2. kaikista osallistujista, vuonna 2009 OECD-maista 2. ja kaikista osallistujista 6. Edellä oli Aasian maita ja alueita.

PISA-arviointitutkimuksessa matematiikan perustiedot ja -taidot määritellään terminologian tuntemisena, faktatietoina sekä laskutoimitusten ja ratkaisumenetelmien käyttötaitoina. Nämä ovat väitöstutkimukseni (Näveri 2009) taksonomian tasoin arvioituina laskemistasoa, eivät analysoivaa eivätkä synteesejä muodostavaa tasoa. Vain tämä taso mahdollistaa uutta luovan ajattelun matematiikan kontekstissa. Siten PISA-tutkimuksen korkeamman tason ajattelu ei kohdistu matematiikan kontekstiin vaan niihin heuristiikkoihin, joilla oppilaat yhdistävät heille tuttua tietoa. Ajattelu on samansuuntainen, kuin oppimaan oppimis -ajattelussa, vaikkakin eri tasolla.

Helsingin yliopiston Koulutuksen arviointikeskus toteutti keväällä 2010 pääkaupunkiseudun kunnissa laajan kaikkia peruskoulun 3.-, 6.- ja 9.-luokkalaisia koskevan oppimaan oppimisen arvioinnin. Kun verrattiin yhdeksäsluokkalaisten tuloksia samassa kunnassa vuonna 2004 tehdyn arvioinnin tuloksiin, huomattiin oppilaiden osaamisen heikentyneen. Neljässä ankkuritehtävässä vain puolet oppilaista ylsi tasoon, jonka vuonna 2004 saavutti 75 % oppilaista. Niin PISA- kuin oppimaan oppimis -ajattelussakin tulee huomioida, että heuristiikkoja käytetään matematiikan kontekstissa sillä tasol-

la, joka on oppilaalle sisäistynyt. Tätä tasoa 9. luokkalaisten matemaattisen ajattelun testissä koulutuksen arviointikeskuksen raportti kuvaa: ”Tehtävät, joita oppilaat arvioinnissa ratkaisevat, on laadittu siten, että useimmat niistä eivät vaadi enempää varsinaista (koulu)osaamista kuin mitä viides- tai kuudesluokkalaiselta voidaan odottaa.”

Arviointikeskuksen tulokset myötäilevät PISA-tutkimuksessa vuonna 2009 havaittua hienoista heikentymistä suomalaisnuorten taidoissa (OECD 2010; Sulkunen ym. 2010), mutta heikentyminen vaikutti selvemältä kuin PISA-tutkimuksessa.

Osaaminen murenemassa

Olen väitöstutkimuksessani (2009) verrannut peruskoulun 9. luokkalaisten, noin 15-vuotiaiden, osaamisessa 20 vuoden aikana tapahtuneita muutoksia Suomessa. Havaintoaineisto koostuu vuonna 1981 (N=351) ja vuonna 2003 (N = 412) kerätystä aineistosta. Koeolosuhteet olivat vertailuvuosina samat. Muun muassa 1980-luvun alussa olleiden tasokurssien mahdollisen poistumisen huomioimme huolehtimalla, että oppilaitoksen koko ikäluokka on tutkimuksessa mukana. Tutkimuksen kaikki testiosiot tehtiin ilman laskinta. Vuoden 2003 testiä ei muunneltu opetussuunnitelmaperusteiseksi ja käytetty niin sanottuja ankkuritehtäviä, koska tutkimus kohdistui näin myös opetussuunnitelmamuuutoksiin. Tutkimuksen mittaristo koostui numeeriseen, numeerisella ja yleisellä tasolla oleviin rakenteisiin liittyvään testistöön. Lukija saa käsityksen osaamisen tasosta ja oppilaiden ajattelusta taulukossa 1 ja taulukossa 2 esitetyistä prosenttiosuuksista eri vastausvaihtoehdoille.

Taulukko 1. Vastausvaihtoehtojen prosenttiosuudet lausekkeelle $(-3)^2$. N = 763

$(-3)^2 =$	-6	-9	9	6	ei mikään edellisistä
1980-luku	3,9	17,1	70,9	7,8	0,3
2000-luku	10,3	32,3	47,5	7,2	1,4

Taulukon 1 ratkaisuprosentit kuvaavat koko numeerisen aineiston muutoksia ratkaisuprosenteissa. Tätäkin suurempi osaamisen lasku on tapahtunut murtolukujen osalta, 60-prosentin tasolta 30-prosentin tasolle. Huolestuttavaa on lisäksi se, että tutkimukseni mukaan käsitteelliselle tasolle murtolukujen peruslaskutoimituksissa ylsi 2000-luvun alun aineistossa vain noin 7 % oppilaista. Siten oppilaiden ajattelu jää proseduurien tasolle perustuen useissa tapauksissa muistamiseen.

Taulukon 2 vastausvaihtoehtojen prosenttiosuuksista nähdään oppilaiden visuaalisen perusta ratkaisuille. Numeerisessa esimerkissä korostuu kertolaskun $10 \cdot 10 = 100$ hahmottaminen ja vastaavasti lausekkeessa $x^4 * x^5$ kertolasku $x * x = 2x$

Taulukko 2. Yleisen rakennetestin pisteisiin eniten vaikuttaneet osiot. Vastausvaihtoehtojen prosenttiosuudet. $N = 763$

$10^3 * 10^2 =$	100^5	10^5	10^6	100^6	ei mikään edellisistä
1980-luku	10,5	72,5	11,2	2,3	2,3
2000-luku	33,8	43,3***	5,5	9,3	6,4
$x^4 * x^5 =$	$2x^{20}$	x^9	$2x^9$	$2x^9$	ei mikään edellisistä
1980-luku	3,5	71,7	8,5	14,3	1,6
2000-luku	11,9	47,3***	29,8	7,9	2,0

Tyttöjen osaaminen on tutkimukseni alueilla heikentynyt poikien osaamista enemmän. Heikoimmassa neljänneksessä muutokset olivat tilastollisesti erittäin merkitseviä kaikissa testiosioissa. Poikien osaaminen on parhaassa neljänneksessä heikentynyt 20 vuoden takaiseen osaamiseen verrattuna tilastollisesti erittäin merkitsevästi tutkimuksessa käytetyn taksonomian ylimmällä tasolla numeerista ja yleistä rakennetta mittavissa testiosioissa. Lisäksi on huomattavaa, että tarkasteluajanjaksolla tyttöjen arvosanat ovat kohonneet poikien arvosanoja enemmän.

Kokonaisvaltainen oppimisprosessi

Usein kuulee keskusteltavan, kumpi on tärkeämpää, käsitteellinen osaaminen vai sujuva laskutaito. Tällöin unohdetaan, että oppiminen on kokonaisvaltainen prosessi. Oppimisen perusvaatimus tulisi olla ymmärtäminen. Tällainen ymmärtävän oppimisen tavoitteellisuus on perusteltavissa, sillä oppilaat, jotka muistavat tietoja ja proseduureja ymmärtämättä niitä, eivät ole varmoja, milloin ja miten heidän tulisi käyttää tietojansa ja siitä syystä heidän oppimisensa on pinnallista (Bransford, Brown & Cocking 1999, NCTM 2000, 20).

Muistin merkitys ymmärtävässä oppimisessä on lisännyt tarvetta oppia ymmärtämään muistamisen taustalla olevia mekanismeja sekä niitä rajoituksia, joita tähän toimintaan sisältyy. Muistilla on suuri merkitys ihmisen ajattelussa. Tiedon käsittelyä – tiedon tallentamista ja mieleen palauttamista – kuvataan usein prosessina, joka kattaa tiedon vastaanottamisen, työstämisen sekä tiedon käyttämisen.

Onnistuneessa oppimisprosessissa tietoisuuden aste vaihtelee prosessin eri vaiheissa. Kun tietoisesti ajattelemme jotain ongelmaa, käytämme työmuistiamme. Tällä on merkitystä oppimistilanteissa, joissa käsiteltävänä olevan tai muistettavan aineksen laajuus rajoittaa sen käsittelyä. Muistissa ei voida työstää samanaikaisesti kuin muutama informaatioyksikköä (engl. chunk) kerrallaan (Baddeley 2000). Tarvittava kapasiteetti vaihtelee tehtävän mukaan. Toinen vaikuttava tekijä on oppijalla käytettävissä olevien tiettyä aihetta koskevien informaatioyksiköiden laajuus.

On useita oppimisen teorioita, missä tietoisuuden aste vaihtelee prosessin eri vaiheissa. Ymmärtämiseen liittyy tietoinen ajattelu, mutta se, ja siis myös ymmärtäminen, ei

oppimisessa riitä. Tarvitaan myös automatisoitumista. Automatisoitumisella tarkoitetaan sitä, että vakioisissa olosuhteissa tapahtuneen toiston ansiosta tehtävän suorittaminen helpottuu olennaisesti eikä kuormita enää samalla tavalla työmuistia kuin automatisoitumaton tieto. Tämä on välttämätöntä tiedon käsittelyssä työmuistin rajoitukset huomioon ottaen, jotta vapautettaisiin kapasiteettia uuden oppimiseen. Tällainen automatisoitunut tieto tulee perustua ymmärtävään kokemukseen. Sen perustelut tulee olla palautettavissa muistista tarvittaessa ja siksi erotan automatisoitumisen mekaanisesta laskemisesta. Kokonaisvaltaisessa oppimisprosessissa saavutetaan siis sekä ymmärtämiseen perustuva käsitteellinen ajattelu että sujuva automatisoitunut laskutaito.

Konkreetin ja yleisen tiedon suhteesta tarkasteluajanjaksolla

1970-luvulla kiinnitettiin huomiota matematiikan mahdollisuuksiin formaaleihin tavoitteisiin pyrittäessä, koska ajateltiin, että yleisellä tasolla oppiminen auttaa tiedon siirtymistä muihin konteksteihin. 1970-luvulla niin sanotun uuden matematiikan (New Math) avulla haluttiin vahvistaa yleisellä tasolla tapahtuvaa ajattelua. Kuitenkin 1980-luvulla jouduttiin pettymään siihen, miten heikosti suoraan yleisessä muodossa opittu asia siirtyi uusiin konteksteihin. Vaikutukset eivät olleet halutunlaisia.

Kaminskin (2008) tutkimusryhmä on vuonna 2008 raportoinut oppimiskokeesta, jossa kaikissa testeissä oppilaat, joille matematiikka opetettiin formaalille käsitteelliselle tasolle asti, pärjäsivät paremmin kuin he, joille opetettiin vastaava asia konkreetilla tasolla sovellustehtävien avulla.

Käsitteenmuodostusprosessi selittää nämä vaihtelut: 1970- ja 80-luvuilla tavoitteena opetuksessa oli käydä läpi proseduurin eri vaiheet, jotta oppilas voi suorittaa samat vaiheet itsenäisesti. Oppilaat oppivat toistamalla yleisessä muodossa opittuja asioita. Osaaminen jäi mekaaniseksi. Sen sijaan jos mahdollistetaan käsitteenmuodostus konkreetilla ja formaalilla tasolla, niin tällöin abduktiivinen, taaksepäin suuntautuva ajattelu tulee mahdolliseksi ja yleisellä tasolla olevan ajattelun voi soveltaa eri konteksteihin.

Kaminskin (2008) tutkimusryhmän tulkinnan mukaan oppimiskokeen kaikissa testeissä oppilaat, joille matematiikka opetettiin symboliselle tasolle asti, pärjäsivät paremmin kuin he, joille opetettiin vastaava asia vain konkreettien sovellustehtävien avulla. Tutkijaryhmän mukaan sanalliset tehtävät ovat tehokas väline sen mittaamiseen, onko oppilas sisäistänyt asian, mutta ne ovat huono tapa opettamiseen. Sen sijaan, jos oppilas on sisäistänyt asian yleisessä abstraktissa muodossa, niin hän pystyy soveltamaan sitä eri konteksteissa. Tutkimusryhmän raportin mukaan oppilaat siirtävät oppimansa helpommin uusiin olosuhteisiin, jos he ajattelevat abstrakteilla symboleilla. Näyttäisi, että 2010-luvulla Suomessa ollaan toistamassa 1970-luvun virhettä siinä, ettei nähdä mitä edellytyksiä on formaalin tason ymmärtävälle ajattelulle.

Myös PISA-tutkimuksessa on tarkasteltu erilaisten strategioiden käyttämistä (Väljärvi ym. 2001, 2002). PISA-raportin mukaan suomalaisilla oppilailta oman opiskelun kontrollointi oli selkeästi OECD-maiden keskitasoa vähäisempää. PISA 2000-arviointi-

raportissa oppilaat arvioivat myös strategioitaan, joita he soveltavat pyrkiessään omaksumaan ja säilyttämään uusia opittavia asioita. Tällöin erottui kaksi erilaista strategiaa; ensimmäinen kuvastaa pyrkimystä muistaa asioita käyttäen mekaanista toistamista ja ulkoa oppimista (muistamisstrategia) ja toinen oppilaan taipumusta arvioida ja kehittää uutta tietoa liittämällä sitä jo aiemmin omaksumaansa, elaborointistrategia. Matemaattisen tiedon omaksumisen asioiden mieleen painamisella ja tehtäviä toistavalla harjoittelulla todetaan PISA-raportissa Suomessa muistamisstrategian soveltamisen (keskiarvo - 0,19) olleen selvästi vähäisempää kuin OECD-maissa keskimäärin. Elaborointistrategian käytön kuvataan liittyvän korkeampiin kognitiivisiin strategioihin. Edellä mainitussa raportissa Suomessa elaborointistrategian käyttö (-0,14) oli vähän OECD-maiden keskiarvon alapuolella. Nämä tulokset tarkoittavat sekä automatisoitumisen tason että korkeamman ajattelun tason olleen suomalaisilla 9. luokkalaisilla vähän OECD-maiden keskiarvon alapuolella vuoden 2000 PISA-arvioinnissa.

Arvioinnin ohjaava vaikutus

Tutkimukseni tulosten perusteella on ongelmanratkaisussa matematiikan kontekstissa puutteita, mikä näkyy laskemistasoisina suorituksina. Arvioinnilla on ohjaava vaikutus. Näyttää, että 2000-luvun peruskoulun päättöluokkien opetussuunnitelmaperusteisessa koulutuksessa on arvioinnissa perusteena ollut tutkimukseni tehtäväalueista osittain poikkeava perusta. Opetushallituksen ”Koulutuksen ja tutkimuksen kehittämissuunnitelmassa vuosille 2007-2012” arvioinnin ohjaavaa vaikutusta korostetaan. Oppilasarvioinnissa havaittuja puutteita tullaan suunnitelman mukaan korjaamaan arvosanojen käytön perusteiden yhtenäistämiseksi ja oppilaiden oikeusturvan parantamiseksi erityisesti jatko-opintoihin pyrittäessä valmistelemalla perusopetukseen laatuksiteerit mainittuna ajanjaksona. Tällä toimenpiteellä pyritään vaikuttamaan matematiikan arvosanoissa havaitun vinouman korjaamiseksi. Opetussuunnitelman tavoitteita muuttamatta arviointi kohdistuu opetussuunnitelman tavoitteiden mukaiseen oppimiseen ja on siten vaikutuksiltaan marginaalinen. Ongelmanratkaisun periaatteiden sisällyttäminen oppiainerajat ylittävien kontekstien lisäksi myös matematiikan kontekstiin ja tällaisen ajattelun kirkastaminen opetussuunnitelman perusteissa olisi vaikutuksiltaan laajakan-toisempi.

Työelämän haasteet

”Kuinka hyvin nuoret ovat valmiita kohtaamaan tulevaisuuden arjen, työn ja elinikäisen oppimisen haasteet?” kysytään PISA-arviointiraportissa. Nämä ovat relevantteja kysymyksiä, koska tiedon määrän jatkuva kasvu ja vaatimus yhä monimutkaisempien ilmiöiden ymmärtämisestä vaikeuttaa perinteisiä opetus- ja oppimiskäytäntöjä (Hatano & Inagaki 1986; Bereiter & Scardamalia 1993).

Matematiikan perusopetukseen käytetään OECD-maissa keskimäärin 4,3 tuntia viikossa, Suomessa 2,6 tuntia. Median välittämiä PISA-tuloksia kuunnellessa ihmettelee, miten oppilaamme pääsevät niin hyvin tuloksiin niin pienellä tuntimäärällä? Näyttäisi siltä, että Suomessa peruskoulumatematiikka on PISA-matematiikkaa ja formaalin tason ajattelun saavuttamiseen aika ei ole riittänyt. Tämä on Suomen koulutuspolitiikan mukaista.

Formaalin ajattelun avulla oppilaat oppivat käsittelemään ei-numeerisia symboleja. Sen kautta he voivat oppia ymmärtämään ja käsittelemään asioita, joita ei voida suoraan havaita, ja oppia, mitä on abstrakti ajattelu. Tästä syystä algebraa pidetään yhtenä peruskoulun jälkeisen toisen asteen koulutuksen kannalta keskeisimpänä matematiikan osa-alueena. Tällä alueella on väitöstutkimukseni mukaan suomalaisilla 9. luokan päättävillä puutteita.

Läntisestä maailmasta kuuluu samansuuntaisia viestejä. Muun muassa U.S. Department of Education (2008) on tehnyt muistion, jossa algebran heikentynyt asema nostetaan esille. PISA-arviointitutkimuksessa Suomi oli vuonna 2009 kuudes. Kaikista osallistuneista maista edellä oli Aasian maita ja alueita. Näissä maissa substanssiosaaminen on ollut perinteisesti vahvaa. PISA-tutkimus antaa viitteitä, että myös erilaisten heuristiikkojen käyttäminen on vahvistunut kyseisissä maissa ja alueilla. Tämä tarkoittaa, että Aasian suunnalla oppilaat kykenevät käyttämään kehittyneitä strategioita korkeammalla matematiikan tasolla kuin länsimaiset ikäkaverinsa.

*Liisa Näveri
FT, tutkijatohtori
Helsingin yliopisto*

Lähteet:

- Baddeley, A. D. The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences* 4. 11 (November 2000): 417-423.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.) 1999. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Hatano, G., & Inagaki, K. 1986. Two courses of expertise. In H. Stevenson, H. Azuma & K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 263-272).
- Kaminski, J., Sloutsky, V., & Heckler, A. 2008. The Advantage of Abstract. *Examples in Learning Math.Science* 25. April 2008: Vol.320. no. 5875, 454-455.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NBE 2004. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004 [Basics for the curriculum of the comprehensive school]*. Opetushallitus. Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy.
- Näveri, L. 2009. *Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana [From Arithmetic to Algebra. Changes in the skills in comprehensive school over 20 years]*. Helsinki: Yliopistopaino.
- Soro, R. & Pehkonen, E. 1998. KASSEL-projekti, osa 1: Peruskoulun oppilaiden matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 197.
- Väljärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P., Malin, A., Puhakka, E. 2001. Suomen tulevaisuuden osaajat. In <http://ktl.jyu.fi/arkisto/verkkojulkaisu/PISA-SIS.PDF>. Luettu 19.6.2011
- Väljärvi, J., Linnakylä, P. (toim.). 2002. Tulevaisuuden osaajat. In <http://ktl.jyu.fi/img/portal/15612/PISA-2000-paaraportti.pdf?cs=1249897776>. Luettu 19.6.2011



MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLISTEN
ALOJEN AKATEEMISET