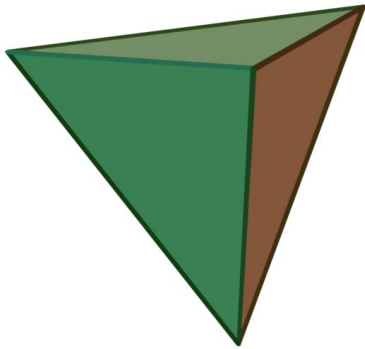
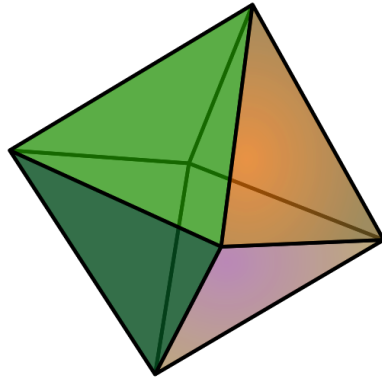


Platonin kappaleet

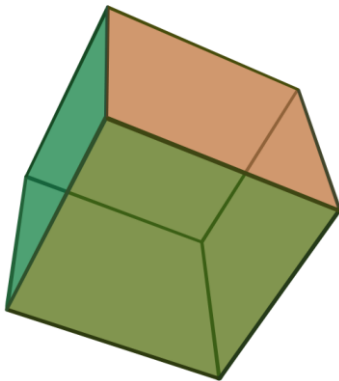
Mahtavaa matematiikkaa -päivä 5.11.2020



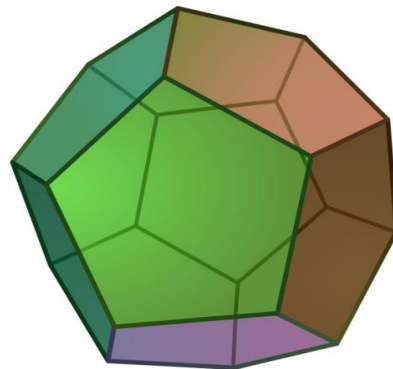
Tetraedri



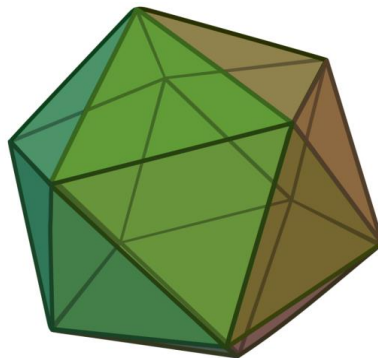
Oktaedri



Kuutio



Dodekaedri



Ikosaedri



Ville Tilvis

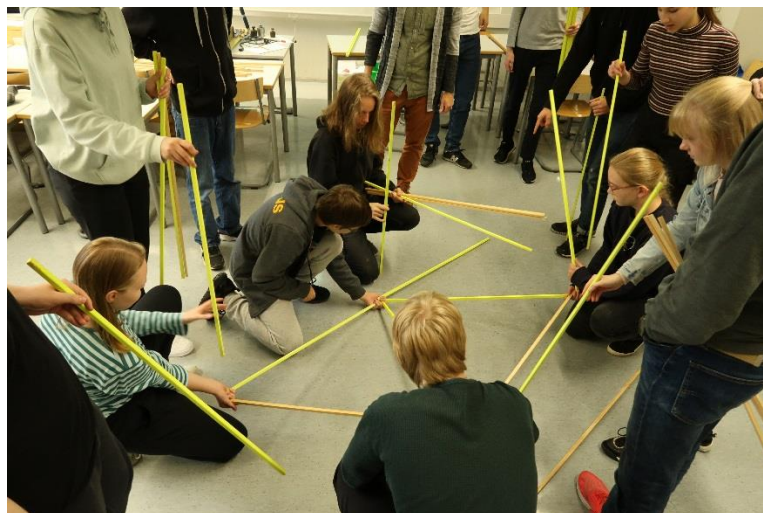
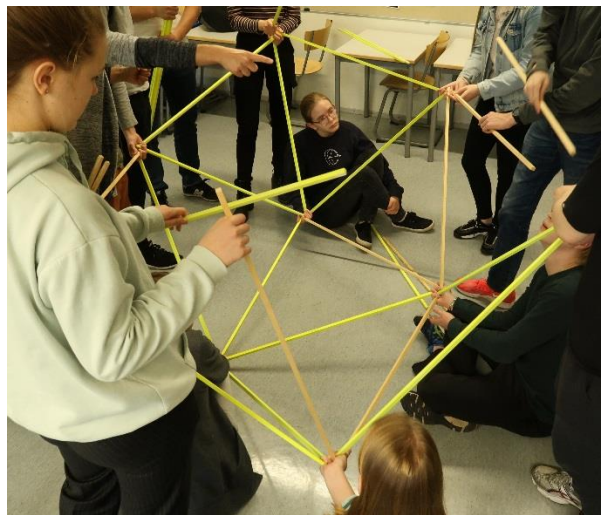
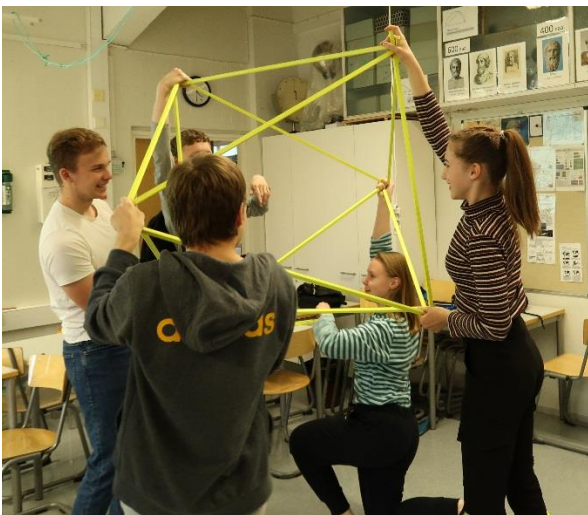
Ratkaisuja ja huomautuksia opettajalle

Tehtävä 1

Platonin kappaleiden itse rakentaminen auttaa ymmärtämään, millä periaatteella kappaleet muodostuvat ja miksi niitä ei voi olla enempään kuin 5 kappaletta. Varsinkin ikosaedrin rakentaminen vaatii jo jonkin verran kärsivällisyyttä ja tarkkuutta sen kanssa, mitkä kärjet kuuluvat yhteen.

Jos valmiita kappaleita ei näytä etukäteen vaan antaa vain esimerkiksi ohjeen ”joka kärjessä täytyy kohdata neljä tahkoa, jotka ovat kaikki tasasivuisia kolmioita”, oppilas löytää oktaedrin itse ja voi kappaletta kääntelemällä varmistua sen säännöllisyydestä. Kokeilemalla käy myös hyvin ilmi, miksi ei muodostu avaruuskappaletta, kun joka kärjessä kohtaa kuusi tasasivuista kolmiota.

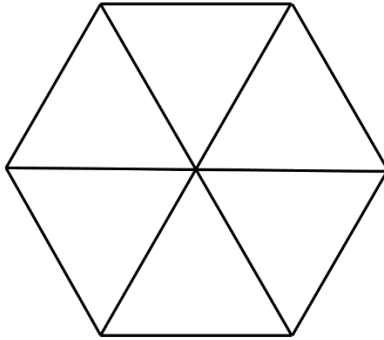
Jos käytettävissä on noin metrin mittaisia keppejä (puurimat tai muoviputken käyvät hyvin), Platonin kappaleita voi rakentaa yhdessä: kukin oppilas ottaa vastuulleen yhden kärjen ja pitelee keppien päitä käsissään. Muut voivat auttaa syöttämällä keppejä rakennelmaan jo kiinnittyneille. Keppejä tarvitaan dodekaedriin tai ikosaedriin 30 kappaletta, joten samoilla kepeillä voi valmistaa yhtä aikaa 5 tetraedriä, 2 kuutiota tai 2 oktaedria. Kappaleiden rakentaminen on myös hyvä ryhmäyttävä harjoitus, sillä rakentaminen vaatii yhteistyötä ja toisten neuvomista.



Kuvat: Salli Kulmala

Tehtävä 2

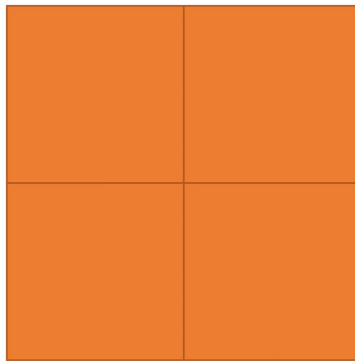
Tasasivuisen kolmion kulman suuruus on 60° , joten kuuden kolmion kulmien summa on $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$. Kolmiot mahtuvat siis tasoon eikä kuvio ala kaareutua monitahokkaaksi, vaikka kolmioita olisi kuinka paljon.



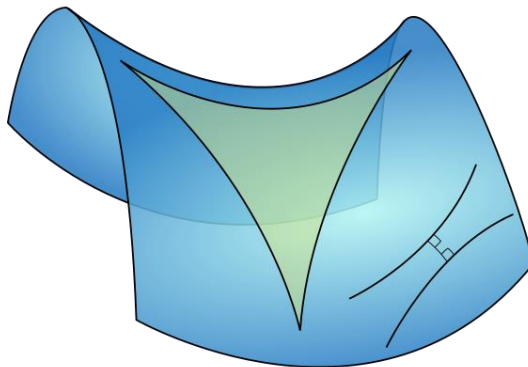
Kun kolmioita on seitsemän tai enemmän, niiden kulmien summa ylittää 360° ja kolmiot eivät mahdu kiinni toisiinsa ilman, että pinta rypytyy ylös ja alas. Tällöin kuvio ei ole enää säännöllinen.

Tehtävä 3

Kun neljä neliötä liitetään yhteen, syntyy 360° asteen kulma. Pinta ei siis ryhdy kaareutumaan ja sulkeutumaan kolmiulotteiseksi kappaleeksi vaan muodostaa osan tasoa.



Jos neliöitä on yli neljä, kärkeen pitäisi muodostua yli 360° asteen kulma. Tämä ei mahdu tasoon tai elliptiselle (itseensä sulkeutuvalle) pinnalle, vaan vaatii hyperbolisen pinnan, joka kaareutuu kahteen eri suuntaan. Platonin kappaletta ei muodostu, sillä tällainen pinta ei voi olla suljettu. Lisäksi kaikki särmät eivät voi olla kiertosymmetrisessä asemassa toisiinsa nähden, koska niiden on taivuttava eri suuntiin.



Tehtävä 4

Säännöllisen kuusikulmion kulmat ovat suuruudeltaan 120° . Kolmen kuusikulmion kohdatessa kulmien summa on siis $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, eli syntyy tasolaatoitus. Säännöllisen monikulmion kulmat kasvavat kärkien lisääntyessä, joten säännöllisten seitsenkulmioiden tai sitä useampikärkisten monikulmioiden tapauksessa kohtaavien kulmien summa on jo yli 360° , jolloin törmätään samaan ongelmaan kuin edellisessä tehtävässä.

Tehtävä 5

Valmiiksi täytetty taulukko näyttää tältä:

	Kärkiä	Särmiä	Tahkoja	$K - S + T$
Tetraedri	4	6	4	2
Kuutio (heksaedri)	8	12	6	2
Oktaedri	6	12	8	2
Dodekaedri	20	30	12	2
Ikosaedri	12	30	20	2

Kärkiä ja särmiä ei tarvitse laskea yksitellen kuvasta. Esimerkiksi ikosaedrissa on 20 kolmion muotoista tahkoa, joten niissä voisi ajatella oleva $3 \cdot 20 = 60$ särmää ja kärkeä. Jokainen särmä kuitenkin kuuluu kahteen eri kolmioon, joten oikea määrä särmiä on $\frac{60}{2} = 30$. Jokainen kärki puolestaan kuuluu viiteen eri kolmioon, joten kärkiä on todellisuudessa $\frac{60}{5} = 12$.

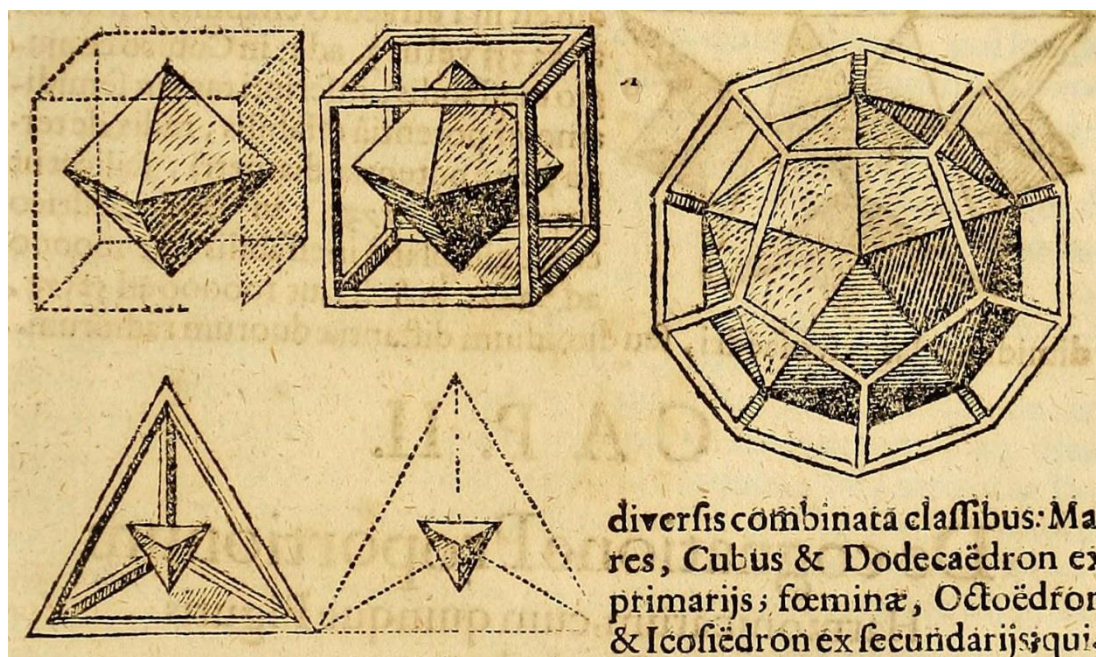
Vastaavasti dodekaedrilla on kärkiä $\frac{12 \cdot 5}{3} = 20$ ja särmiä $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

Viimeisen sarakkeen tulos kärjet – särmät + tahkot = 2 ei ole sattumaa, vaan tulos pätee yleisemminkin kuperille monitahokkaille. Tämä tulos, Eulerin monitahokaslause, todistetaan lopuksi.

Tehtävä 6

Kuution duaali on oktaedri ja päinvastoin. Vastaavasti ikosaedri ja dodekaedri ovat toistensa duaaleja.

Tetraedri on itsensä duaali. Kuva: Johannes Kepler: *Harmonices Mundi* (1619)



Eulerin monitahokaslause

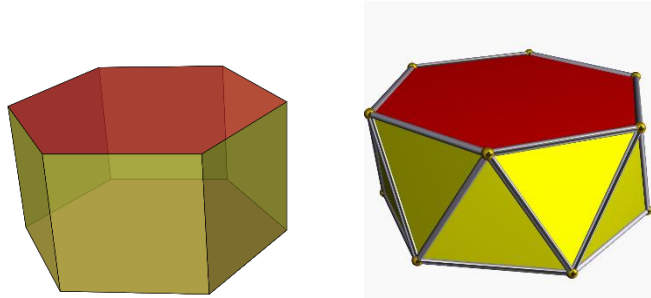
1. Tämän projektion voi tehdä mille tahansa monitahokkaalle, jonka pinta on topologisesti ekvivalentti pallon kanssa, ts. pinnan voi venyttää palloksi rikkomatta sitä.
2. Jokaisen monikulmion voi jakaa kolmioiksi piirtämällä jäniteitä. Tästä lisää:
https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon_triangulation

Kun uusi lävistäjä lisätään, kuvioon syntyy yksi särmä lisää ja yksi tahko lisää, joten Eulerin karakteristika ei muutu.

3. Tällainen poisti poistaa yhden särmän ja yhden tahkon, joten Eulerin karakteristika ei muutu.
4. Poistossa katoaa yksi tahko, yksi kärki ja kaksi särmää. Eulerin karakteristika ei siis muutu.
5. Jäljellä olevassa kolmiossa on yksi "tahko", kolme kärkeä ja kolme "särmää". Eulerin karakteristika on siis $\chi = 3 - 3 + 1 = 1$. Tulos ei ole kaksi, koska yksi alkuperäisen kuvion tahkoista katosi vaiheessa 1. Yhden tahkon särmät nimittäin muodostivat tasokuvion ulkoreunan.
6. Samat vaiheet voitaisiin tehdä mille tahansa konveksille monikulmiolle, joten tulos $K - S + T = 2$ pätee niille kaikille.

Arkhimedeen kappaleet

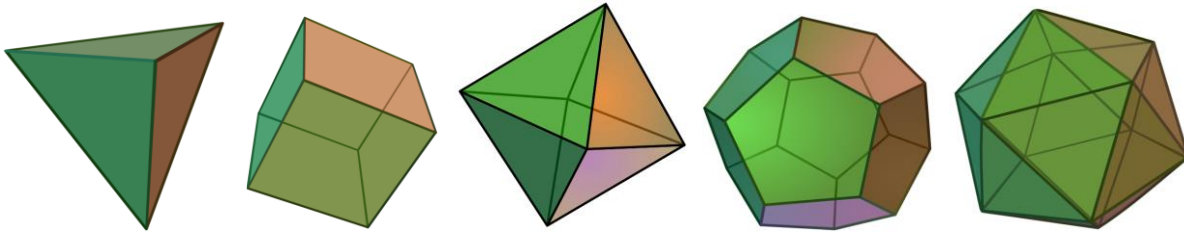
Kun särmiön pohjana on säännöllinen monikulmio ja särmiön korkeus on sama kuin pohjatahkon särmän pituus, syntyy ehdot täyttävä kappale.



Jos särmiön toista pohjaa kiertää hieman, on mahdollista muodostaa monitahokas, jonka sivut ovat tasasivuisia kolmioita.

Näiden äärettömien perheiden lisäksi Arkhimedeen kappaleita on yhteensä 13 tai 14 riippuen siitä, kuinka ankaraa symmetriaa kappaleilta vaaditaan. Täydellinen lista löytyy sivulta https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid .

Platonin kappaleet, työohje



Määritelmä: Platonin kappaleiksi kutsutaan säännöllisiä kuperia monikulmioita.

Säännöllisyydellä tarkoitetaan tässä sitä, että monitahokkaan jokainen tahko on samanlainen säännöllinen monikulmio, ja joka kärjessä kohtaa yhtä monta tahkoa samanlaisessa asetelmassa. Monitahokas on kuperi, kun mikään sen kahta pistettä yhdistävä jana ei kulje monitahokkaan ulkopuolella.

Platonin kappaleille on lainannut nimensä kreikkalainen filosofi Platon (n. 427-347 eaa.).

Nimitykset

Nimi	Jokaisessa kärjessä kohtaa
tetraedri	3 tasasivuista kolmiota
kuutio eli heksaedri	3 neliötä
oktaedri	3 tasasivuista kolmiota
dodekaedri	3 säännöllistä viisikulmiota
ikosaedri	5 tasasivuista kolmiota

Tehtävä 1.

Rakenna mallikuva kaikista Platonin kappaleista. Mahdollisia toteutustapoja on useita:

- cocktail-tikut ja styroksipallot/karkit/viinirypäleet/sinitarra
- Geomag-lelut
- pitkät kepit (esimerkiksi 1 metri), jolloin jokaiseen kärkeen tarvitaan yksi ihminen pitämään keppejä kasassa

Tehtävä 2.

Kun säännöllisen monitahokkaan jokaisessa kärjessä kohtaa kolme tasasivuista kolmiota, syntyy tetraedri. Kun kolmioita on joka kärjessä neljä, syntyy oktaedri, ja viidellä kolmiolla puolestaan ikosaedri. Miksi ei muodostu Platonin kappaleita, kun yhdessä kärjessä kohtaa kuusi kolmiota? Entä, kun kolmioita on seitsemän?

Tehtävä 3.

Miksi Platonin kappaleita ei voi muodosta yli kolmesta neliöstä tai yli kolmesta viisikulmiosta?

Tehtävä 4.

Miksi ei ole olemassa Platonin kappaleita, jotka muodostuisivat säännöllistä kuusikulmioista, seitsenkulmioista tai vielä useampikulmaisista säännöllisistä monikulmioista?

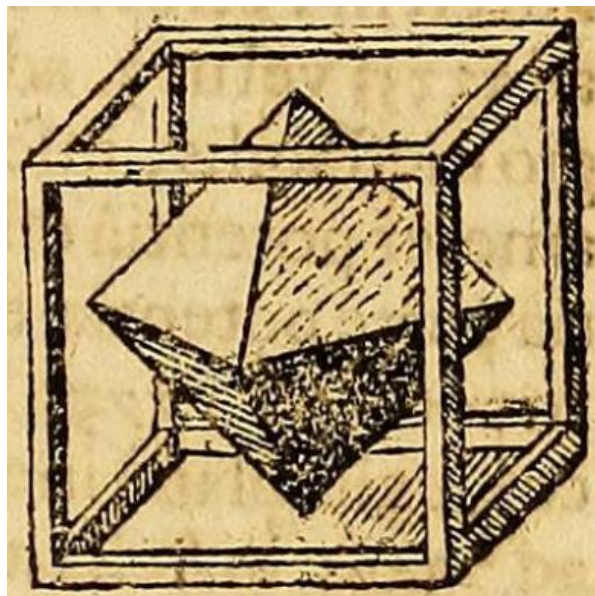
Tehtävä 5.

Laske, kuinka monta kärkeä, särmää ja tahkoa kussakin Platonin kappaleessa on. Keksitkö helpompaa tapaa laskea kuin kuvasta katsominen?

	Kärkiä	Särmiä	Tahkoja	$K - S + T$
Tetraedri				
Kuutio (heksaedri)				
Oktaedri				
Dodekaedri				
Ikosaedri				

Tehtävä 6. Platonin kappaleiden duaalit

Kun kunkin tahkon keskipisteet yhdistetään särmillä, kappaleen sisälle syntyy sen duaali. Minkä mallinen on kunkin Platonin kappaleen duaali?



Kuva: Johannes Kepler: *Harmonices Mundi* (1619)

Eulerin monitahokaslause

Kun minkä tahansa Platonin kappaleen kärjet, särmät ja tahkot laskee, pätee

$$\begin{aligned} \text{Kärjet} - \text{Särmät} + \text{Tahkot} &= 2 \\ \text{eli} \\ K - S + T &= 2. \end{aligned}$$

Mielenkiintoista kyllä tämä ominaisuus on kaikilla kuperilla eli konvekseilla monitahokkailla. Tämä tulos tunnetaan nimellä Eulerin monitahokaslause.

Lukua

$$\chi = K - S + T$$

Kutsutaan nimellä Eulerin karakteristika.

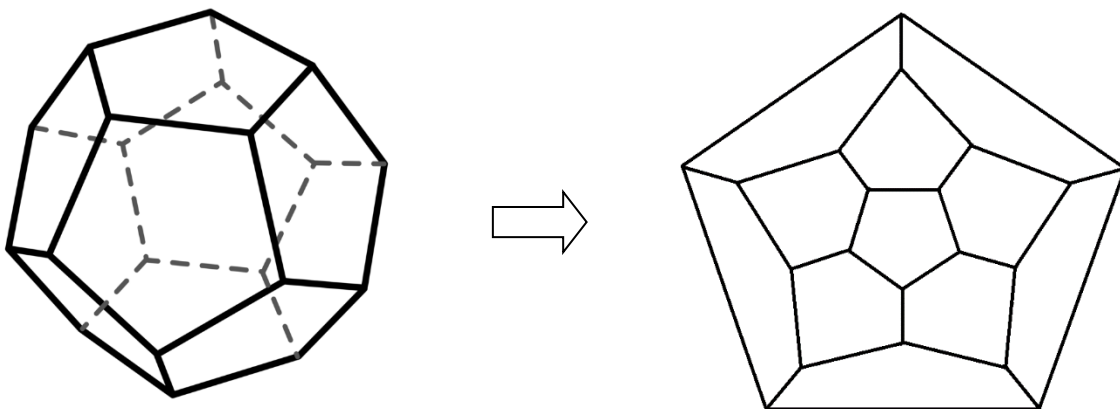
Tässä esitettävän todistuksen idean esitteli Augustin-Louis Cauchy vuonna 1811. Sama todistus pätee paitsi konvekseille, myös mille tahansa reiättömälle monitahokkaalle, jonka pinta on venytettävissä palloksi.

Todistus on tässä esitelty intuitiivisessa muodossa ilman teknisiä yksityiskohtia.

Väite: Kuperan monitahokkaan Eulerin karakteristika on suuruudeltaan 2.

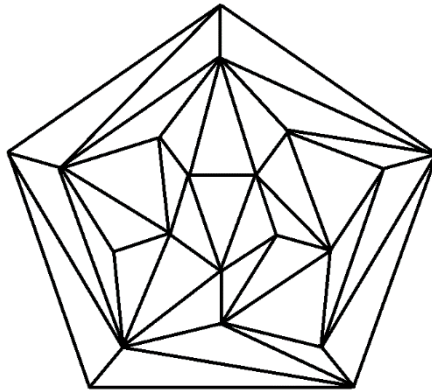
Todistuksen suuntaviivat:

1. Aloitetaan tutkimalla konveksia monitahokasta. Siirretään monitahokkaan kärjet samaan tasoon niin, että mitkään särmät eivät mene päällekkäin. Lopputulos muistuttaa näkymää, jonka näkisit, jos kurkistaisit yhden tahkon läpi monitahokkaan sisään. Kaikki alkuperäisen monitahokkaan kärjet ja särmät ovat näkyvissä, samoin kaikki tahkot, paitsi yksi. Yhden alkuperäisen tahkon särmistä nimittäin muodostuu kuvion ulkoreuna.

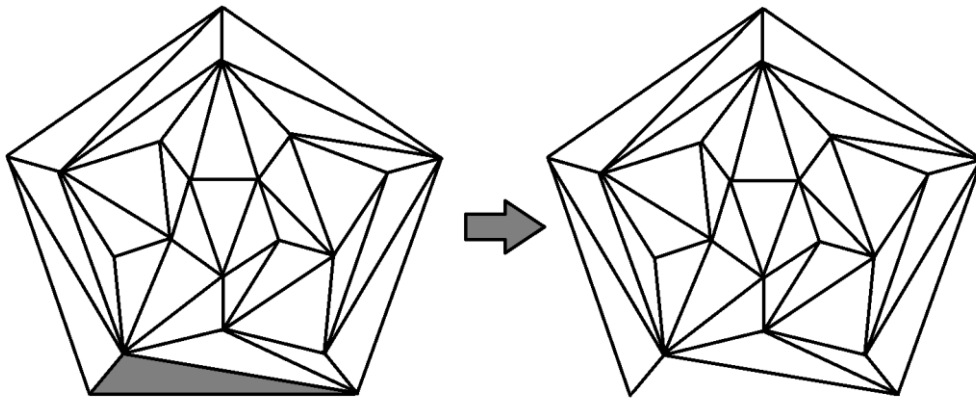


Vaikka kyseessä on nyt tasokuvio, puhutaan jatkossakin selkeyden vuoksi särmistä ja tahkoista.

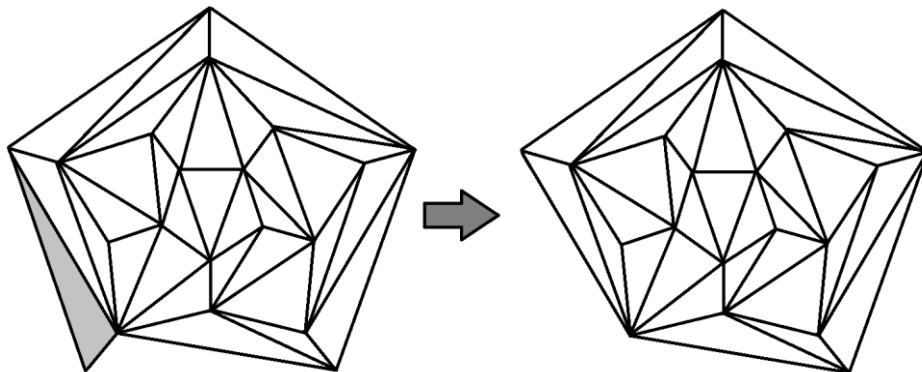
2. Jaa kukin alue kolmioihin lisäämällä kärkien välille uusia särmiä. Älä luo uusia kärkipisteitä. Miten muuttuu $K - S + T$? Voit miettiä ensin, miten yhden viivan lisääminen muuttaa tilannetta.



3. Poista kolmio, jolla on täsmälleen yksi sivu kuvion ulkolaidalla. Miten muuttuu $K - S + T$?



4. Poista kolmio, jolla on tasan kaksi vierekkäistä sivua kuvion ulkolaidalla. Miten muuttuu $K - S + T$?



5. Toista vaiheita 3 tai 4, kunnes jäljellä on yksi kolmio.

Mikä on $K - S + T$ jäljelle jääneelle kolmiolle? Miksi se ei ole kaksi?

6. Vie todistus loppuun.

Arkhimedeen kappaleet

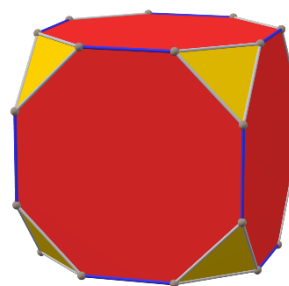
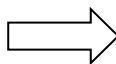
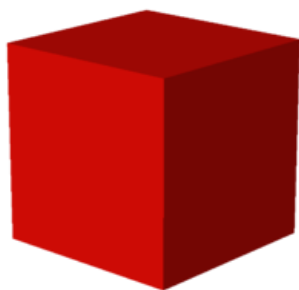
Arkhimedeen kappaleet määritellään näin:

- kappaleen tahkot ovat säännöllisiä monikulmioita (mutta eivät välttämättä keskenään samanlaisia)
- kappaleen jokainen kärki on samanlainen (samat monikulmiot, sama asema koko kappaleen suhteen)

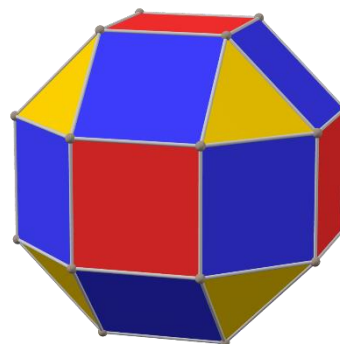
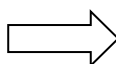
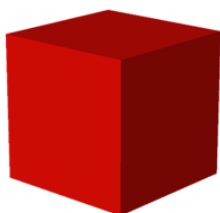
Pappus Aleksandrialainen (n. 290 - 350) viittasi Arkhimedes Syrakusalaisen (n. 287 – 212 eaa.) kadonneisiin kirjoituksiin Arkhimedeen kappaleista. Arkhimedes oli löytänyt ne kaikki.

Eräitä tapoja luoda Arkhimedeen kappaleita

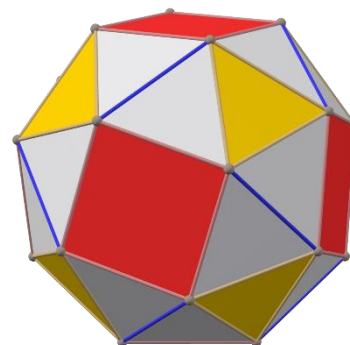
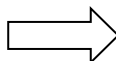
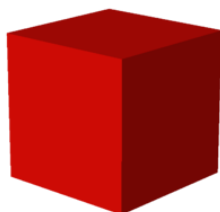
Kulmien poisto



Laajentaminen



Laajennos + kierto



Etsi Arkhimedeen kappaleita. Montako löydät?

Kuvalähteet

Kansilehden kuvat:

Tetraedri	Wikipedia, käyttäjät Kjell André ja DTR https://en.wikipedia.org/wiki/File:Tetrahedron.svg
Kuutio	Wikipedia, käyttäjä DTR https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hexahedron.svg
Oktaedri	Wikipedia, käyttäjä Stannered https://en.wikipedia.org/wiki/File:Octahedron.svg
Dodekaedri	Wikipedia, käyttäjä DTR https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.svg
Ikosaedri	Wikipedia, käyttäjä DTR https://en.wikipedia.org/wiki/File:Icosahedron.svg

Kuvia koskee Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported -lisenssi.

Eukleideen monitahokaslauseen todistuksessa käytetty kuva Dodekaedrista on sivulta [kissCC0.com](https://www.kisscc0.com).
<https://www.kisscc0.com/free-icosahedron/>
Kuva on vapaassa käytössä.

Platonin kappaleiden dualit: Johannes Kepler, Harmonices Mundi (1619)
https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_polyhedron#/media/File:Ioanniskepplerih00kepl_0271_crop.jpg

Arkhimedeen kappaleet Wikipedia, käyttäjä Watchduck (Tilman Piesk).
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polyhedron_truncated_6_max.png
https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid#/media/File:Polyhedron_small_rhombi_6-8_max.png
https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid#/media/File:Polyhedron_snub_6-8_left_max.png
Lisenssi: [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Kuvat Platonin kappaleiden rakentelusta: Salli Kulmala

Kuva hyperbolisesta pinnasta: Wikipedia, käyttäjä LucasVB, Public Domain
https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry#/media/File:Hyperbolic_triangle.svg

Kuva kuusikulmiopohjaisesta särmiöstä: Wikipedia, R. A. Nonenmacher, CC BY-SA 4.0
[https://en.wikipedia.org/wiki/Prism_\(geometry\)#/media/File:Hexagonal_Prism_BC.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Prism_(geometry)#/media/File:Hexagonal_Prism_BC.svg)

Kuva kuusikulmiopohjaisesta antisärmiöstä: Robert Webb: Stella software
(<http://www.software3d.com/Stella.php>)
Itse kuva: https://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism#/media/File:Hexagonal_antiprism.png