

Topologiaa muovailuvahalla

Katso ensin seuraava video



<https://youtu.be/ujaXmyvvsD0>

Tutkitaan erilaisia kappaleita kuten muovailuvahasta tehtyä “palloa” ja “donitsia”. Keskeisenä kysymyksenä on se, mikä tekee niiden muodoista keskeisellä tavalla erilaisia?

Siinä missä *geometria* lähestyy kuvioita ja kappaleita jollakin tavalla mittaamisen ja siihen liittyvän laskemisen näkökulmasta, *topologiaksi* kutsuttu matematiikan osa-alue on kiinnostunut rakenteista ja muodoista hieman yleisemmällä tasolla.

Topologiassa keskenään “samanlaisia” pintoja kutsutaan homeomorfisiksi keskenään, mikä tarkoittaa sitä, että niiden välillä on olemassa homeomorfismiksi kutsuttu kuvaus. Homeomorfismia voidaan ajatella kutakuinkin sellaisena operaationa, joka voi venyttää ja taivuttaa pintoja, mutta ei repiä eikä yhdistää sen osia. Tätä havainnollistavat muovailuvahalla tehdyt litistykset, painelut ja venytykset.

Kuinka “pallon” ja “donitsin” erilaisuutta sitten voidaan oikein tutkia? Topologiassa kiinnostuksen kohteena ovat niiden “kuoret” eli pinnat (donitsin pintaa kuvaa matematiikan käsite *torus*). Pinnan ominaisuuksia voidaan tiettyyn pisteeseen asti havainnollistaa leikkelemällä kappaleita, kuten videolla tehtiin.

Piirretään ensin pallon pinnalle silmukka eli viiva, jonka alku- ja loppupiste ovat samat) ja leikataan se sitä pitkin. Huomataan, että syntyy kaksi erillistä palaa (eli kappale ei ole enää yhtenäinen). Tämä tapahtuu kaikilla pallon pinnalle tehdyillä silmukoilla (kokeile, jos et usko!).

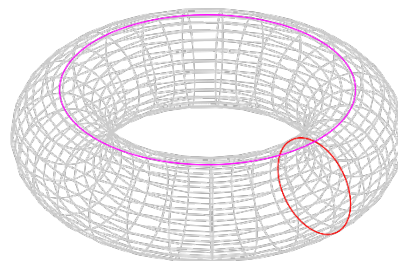
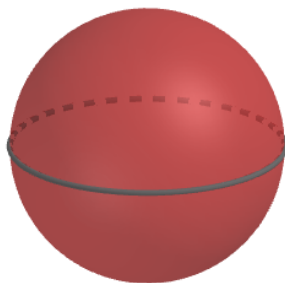
Kokeillaan seuraavaksi samaa torus-pinnalla (eli “donitsilla”). Huomataan, että joskus syntyy kaksi erillistä palaa, joskus kappale pysyy yhtenäisenä. Jos kappale on toimenpiteen jälkeen edelleen yhtenäinen, se on nyt “samanlainen” eli *homeomorfinen* pallon kanssa. Eli toimenpide voidaan suorittaa donitsille tasan kerran.

1. Mitkä kuva esineistä käyttäytyvät samalla tavalla kuin pallo ja mitkä samalla tavalla kuin torus, jos niiden pintaan piirtää silmukan ja leikkaa sitä pitkin?



Toisin sanoen: Mitkä kuvan esineistä ovat homeomorfisia pallon kanssa? Entä mitkä ovat homeomorfisia donitsin kanssa?

2. Onko olemassa kappaleita, joille kuvattu silmukan leikkaaminen voidaan suorittaa kaksi kertaa tai useammin kappaleen säilyessä silti yhtenäisenä? Miten kuvailisit sellaisia kappaleita? Onko yllä olevassa kuvassa tällaisia esineitä?
3. Kuten yllä kerrottiin, topologiassa pallon ja donitsin keskeinen ero koskee niiden pintaa. Pinnalle piirrettäviä silmukoita voi tutkia myös leikkaamalla kappaleita, esimerkiksi kuminauhojen avulla. Jos asetat kuminauhan pallopinnalle, voit liikuttaa kuminauhaa miten päin tahansa pallon pinnalla irrottamatta kuminauhaa. Tässä mielessä kaikki pallopinnan silmukat ovat samanlaisia. Kuinka käy toruksen tapauksessa?



4. Kolmas tapa ajatella pallon ja toruksen eroa on piirtää pinnalle suljettu lenkki, ja ruveta sitten värittämään kappaletta lenkin toiselta puolelta. Miten käy, kun väritystä jatkaa kaikkialle, minne ulottuu kulkematta lenkin yli? Tuleeko koko pinta väritetyksi vai vain osa? Mikä ero pallolla ja toruksella on tässä?
5. Ota selvää, mitä tarkoittaa toruksen *genus*.