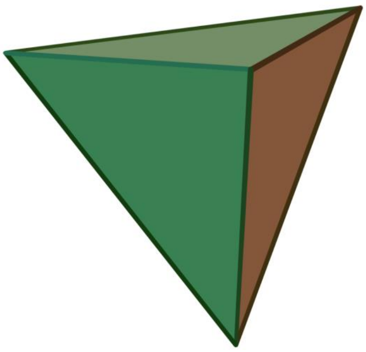
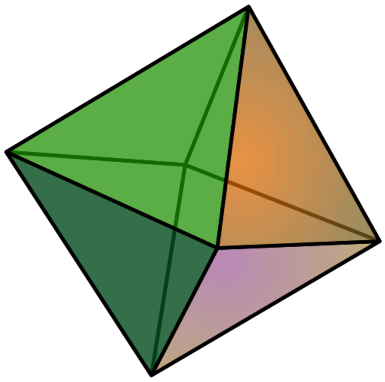
Platonin kappaleet

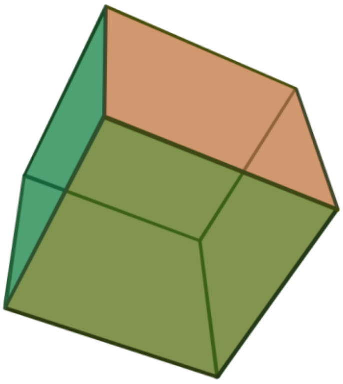
Mahtavaa matematiikkaa -päivä 5.11.2020



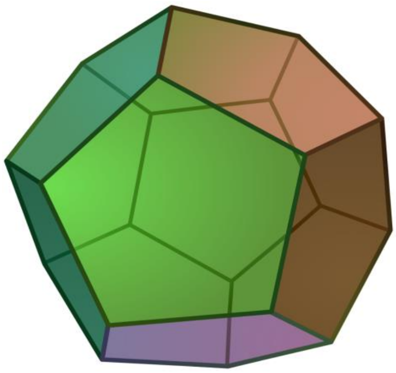
Tetraedri



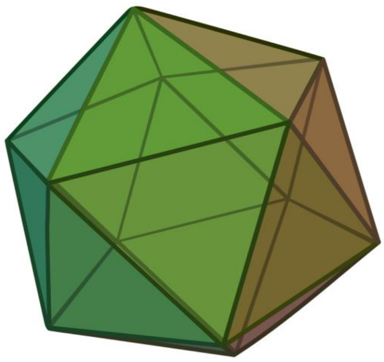
Oktaedri



Kuutio



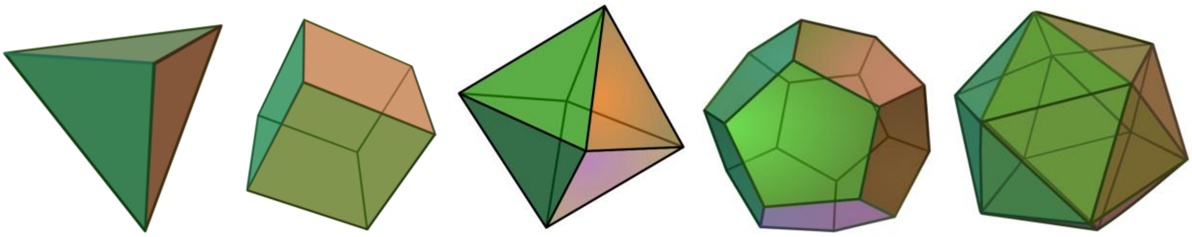
Dodekaedri



Ikosaedri

Ville Tilvis

Platonin kappaleet, työohje



Määritelmä: Platonin kappaleiksi kutsutaan säännöllisiä kuperia monikulmioita.

Säännöllisyydellä tarkoitetaan tässä sitä, että monitahokkaan jokainen tahko on samanlainen säännöllinen monikulmio, ja joka kärjessä kohtaa yhtä monta tahkoa samanlaisessa asetelmassa. Monitahokas on kupera, kun mikään sen kahta pistettä yhdistävä jana ei kulje monitahokkaan ulkopuolella.

Platonin kappaleille on lainannut nimensä kreikkalainen filosofi Platon (n. 427-347 eaa.).

Nimitykset

Nimi	Jokaisessa kärjessä kohtaa
tetraedri	3 tasasivuista kolmiota
kuutio eli heksaedri	3 neliötä
oktaedri	3 tasasivuista kolmiota
dodekaedri	3 säännöllistä viisikulmiota
ikosaedri	5 tasasivuista kolmiota

Tehtävä 1.
Rakenna mallikuva kaikista Platonin kappaleista. Mahdollisia toteutustapoja on useita:

- cocktail-tikut ja styroksipallot/karkit/viinirypäleet/sinitarra
- Geomag-lelut
- pitkät kepit (esimerkiksi 1 metri), jolloin jokaiseen kärkeen tarvitaan yksi ihminen pitämään keppejä kasassa

Tehtävä 2.
Kun säännöllisen monitahokkaan jokaisessa kärjessä kohtaa kolme tasasivuista kolmiota, syntyy tetraedri. Kun kolmioita on joka kärjessä neljä, syntyy oktaedri, ja viidellä kolmiolla puolestaan ikosaedri. Miksi ei muodostu Platonin kappaletta, kun yhdessä kärjessä kohtaa kuusi kolmiota? Entä, kun kolmioita on seitsemän?

Tehtävä 3.
Miksi Platonin kappaleita ei voi muodostaa yli kolmesta neliöstä tai yli kolmesta viisikulmiosta?

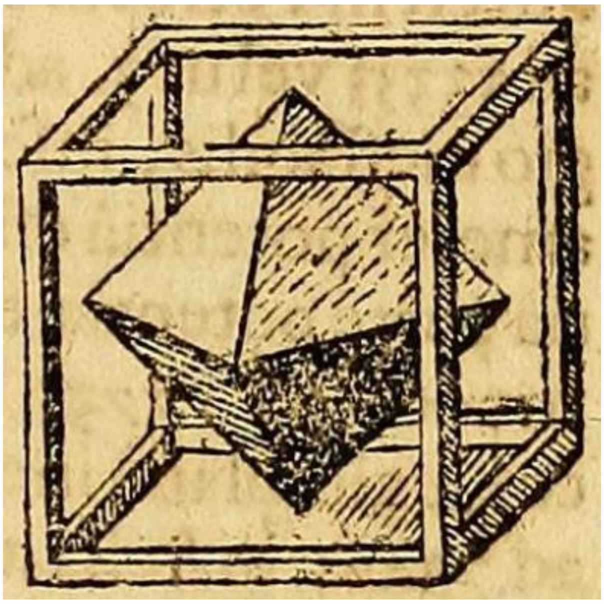
Tehtävä 4.
Miksi ei ole olemassa Platonin kappaleita, jotka muodostuisivat säännöllistä kuusikulmioista, seitsenkulmioista tai vielä useampikulmaisista säännöllisistä monikulmioista?

Tehtävä 5.
Laske, kuinka monta kärkeä, särmää ja tahkoa kussakin Platonin kappaleessa on. Keksitkö helpompaa tapaa laskea kuin kuvasta katsominen?

	Kärkiä	**Särmiä**	**Tahkoja**	$\boldsymbol{K - S + T}$
Tetraedri				
Kuutio (heksaedri)				
Oktaedri				
Dodekaedri				
Ikosaedri				

Tehtävä 6. Platonin kappaleiden duaalit

Kun kunkin tahkon keskipisteet yhdistetään särmillä, kappaleen sisälle syntyy sen duaali. Minkä mallinen on kunkin Platonin kappaleen duaali?



Kuva: Johannes Kepler: *Harmonices Mundi* (1619)

Eulerin monitahokaslause

Kun minkä tahansa Platonin kappaleen kärjet, särmät ja tahkot laskee, pätee

Kärjet – Särmät + Tahkot = 2
eli
$$K - S + T = 2.$$

Mielenkiintoista kyllä tämä ominaisuus on kaikilla kuperilla eli konvekseilla monitahokkailla. Tämä tulos tunnetaan nimellä Eulerin monitahokaslause.

Lukua

$$\chi = K - S + T$$

Kutsutaan nimellä Eulerin karakteristika.

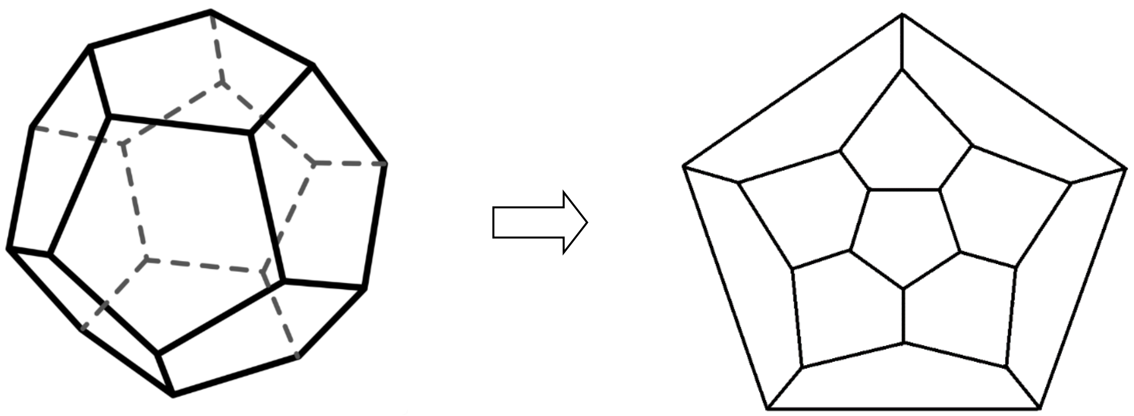
Tässä esitettävän todistuksen idean esitteli Augustin-Louis Cauchy vuonna 1811. Sama todistus pätisi paitsi konvekseille, myös mille tahansa reiättömälle monitahokkaalle, jonka pinta on venytettävissä palloksi.

Todistus on tässä esitelty intuitiivisessa muodossa ilman teknisiä yksityiskohtia.

Väite: Kuperan monitahokkaan Eulerin karakteristika on suuruudeltaan 2.

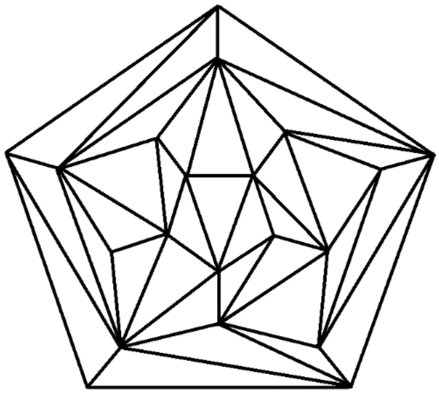
Todistuksen suuntaviivat:

1. Aloitetaan tutkimalla konveksia monitahokasta. Siirretään monitahokkaan kärjet samaan tasoon niin, että mitkään särmät eivät mene päällekkäin. Lopputulos muistuttaa näkymää, jonka näkisit, jos kurkistaisit yhden tahkon läpi monitahokkaan sisään. Kaikki alkuperäisen monitahokkaan kärjet ja särmät ovat näkyvissä, samoin kaikki tahkot, paitsi yksi. Yhden alkuperäisen tahkon särmistä nimittäin muodostuu kuvion ulkoreuna.

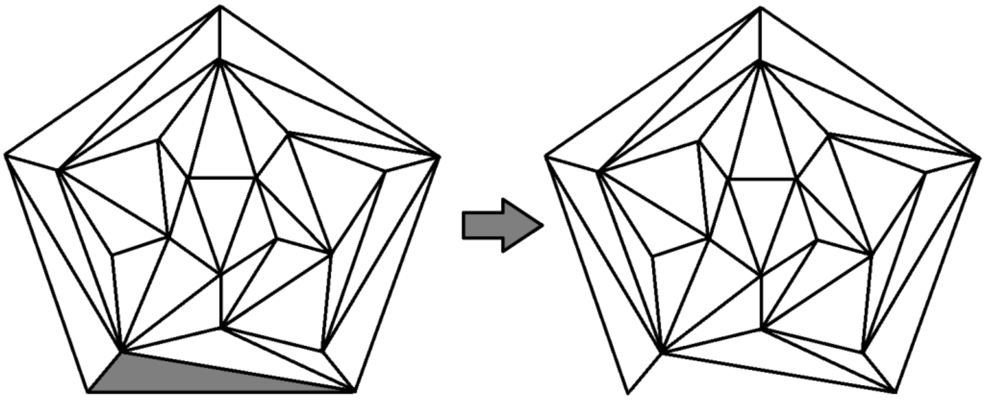


Vaikka kyseessä on nyt tasokuvio, puhutaan jatkossakin selkeyden vuoksi särmistä ja tahkoista.

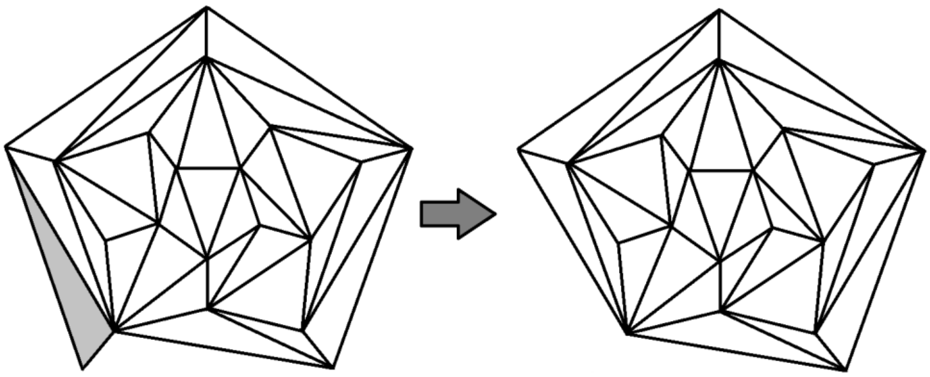
2. Jaa kukin alue kolmioihin lisäämällä kärkien välille uusia särmiä. Älä luo uusia kärkipisteitä.
Miten muuttuu $K - S + T$? Voit miettiä ensin, miten yhden viivan lisääminen muuttaa tilannetta.



3. Poista kolmio, jolla on täsmälleen yksi sivu kuvion ulkolaidalla. Miten muuttuu $K - S + T$?



4. Poista kolmio, jolla on tasan kaksi vierekkäistä sivua kuvion ulkolaidalla.
Miten muuttuu $K - S + T$?



5. Toista vaiheita 3 tai 4, kunnes jäljellä on yksi kolmio.

Mikä on $K - S + T$ jäljelle jääneelle kolmiolle? Miksi se ei ole kaksi?

6. Vie todistus loppuun.

Arkhimedeen kappaleet

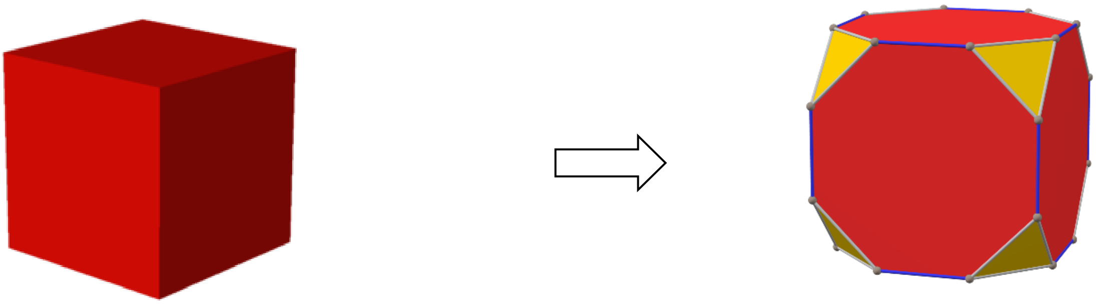
Arkhimedeen kappaleet määritellään näin:

- kappaleen tahkot ovat säännöllisisä monikulmioita (mutta eivät välttämättä keskenään samanlaisia)
- kappaleen jokainen kärki on samanlainen (samat monikulmiot, sama asema koko kappaleen suhteen)

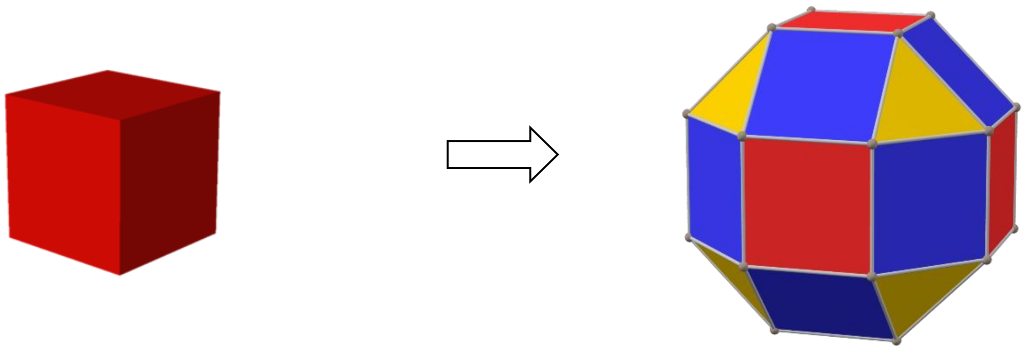
Pappus Aleksandrialainen (n. 290 - 350) viittasi Arkhimedes Syrakusalaisen (n. 287 – 212 eaa.) kadonneisiin kirjoituksiin Arkhimedeen kappaleista. Arkhimedes oli löytänyt ne kaikki.

Eräitä tapoja luoda Arkhimedeen kappaleita

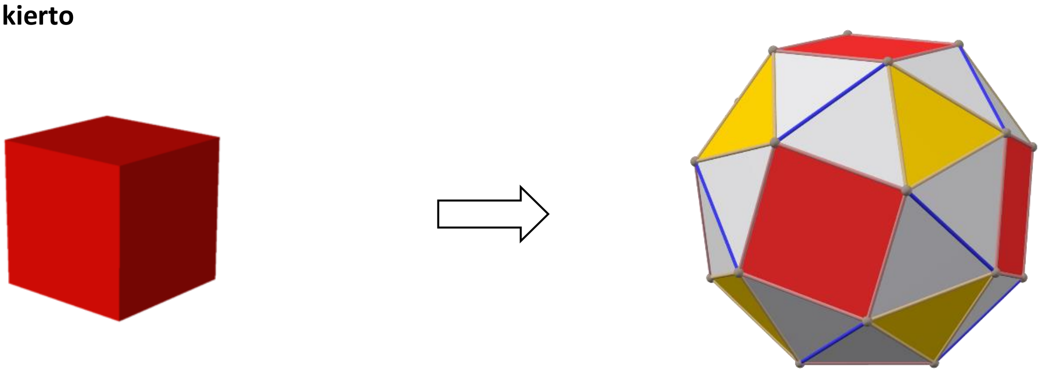
Kulmien poisto



Laajentaminen



Laajennos + kierto



Etsi Arkhimedeen kappaleita. Montako löydät?

Kuvalähteet

Kansilehden kuvat:

Tetraedri Wikipedia, käyttäjät Kjell André ja DTR
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Tetrahedron.svg

Kuutio Wikipedia, käyttäjä DTR
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hexahedron.svg

Oktaedri Wikipedia, käyttäjä Stannered
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Octahedron.svg

Dodekaedri Wikipedia, käyttäjä DTR
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.svg

Ikosaedri Wikipedia, käyttäjä DTR
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Icosahedron.svg

Eukleideen monitahokaslauseen todistuksessa käytetty kuva Dodekaedrista
on sivulta kissCC0.com.
https://www.kisscc0.com/free-icosahedron/
Kuva on vapaassa käytössä.

Platonin kappaleiden duaalit: Johannes Kepler, Harmonices Mundi (1619)
https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_polyhedron#/media/File:Ioanniskepplerih00kepl_0271_crop.jpg

Arkhimedeen kappaleet Wikipedia, käyttäjä Watchduck (Tilman Piesk).
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polyhedron_truncated_6_max.png
https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid#/media/File:Polyhedron_small_rhombi_6-8_max.png
https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid#/media/File:Polyhedron_snub_6-8_left_max.png