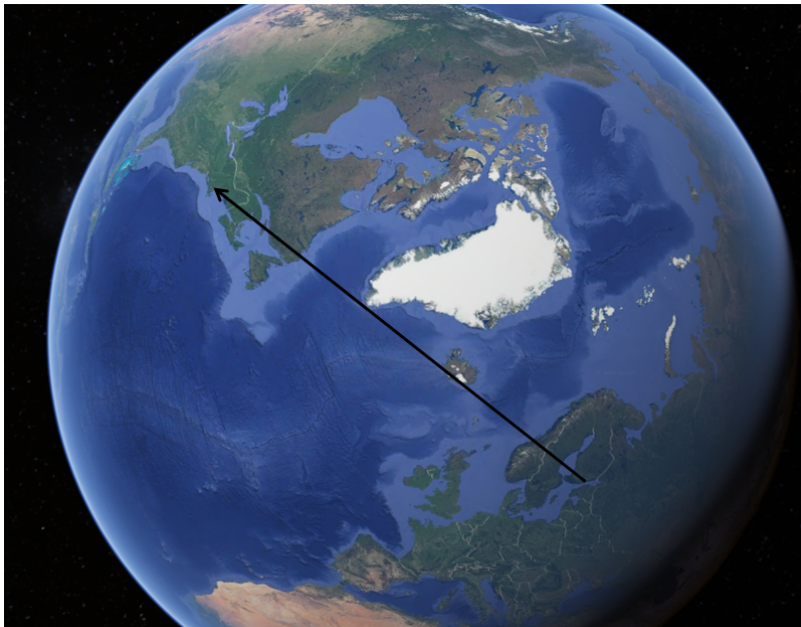


Joitakin huomioita pallogeometriasta

1. Alla on Finnairin reittikartta vuodelta 2017. Minkähän takia reitit eivät ole suoria?



2. Piirretään pallon pinnalle kaksi pistettä. Millainen on lyhyin reitti pallon pintaa pitkin niiden välillä? Sano niin tarkasti kuin osaat.



Kuva: Google Earth

3. Sovitaan, että pallon pinnalla jana on kahden pisteen välinen lyhyin etäisyys. Miltä näyttää kolmio pallon pinnalla?
4. Millaisten pisteiden välillä lyhyimpiä reittejä pallon pintaa pitkin on enemmän kuin yksi?
5. Voisiko pallon pinnalla olla "kaksikulmio", eli monikulmio, jossa on kaksi kärkeä, kaksi sivua ja niiden välissä pinta-alaa? Muista, että sivujen pitää olla janoja.

6. Voiko pallon pinnalle piirtää kolmion, jossa on kaksi suoraa kulmaa? Entä kolmion, jossa suoria kulmia on kolme?
7. Millaisia arvoja kolmion kulmien summa voi saada pallon pinnalla? Mikä on minimi? Entä maksimi?
8. Mitä voit sanoa nelikulmion kulmien summasta pallon pinnalla? Mikä on alaraja?
9. Coloradon osavaltion rajat kulkevat pituus- ja leveyspiirien suuntaisina. Kuinka suuria ovat Coloradon kulmat? Voiko Coloradoa kutsua suorakulmioksi? Millä perusteella? Vertaa edelliseen tehtävään.

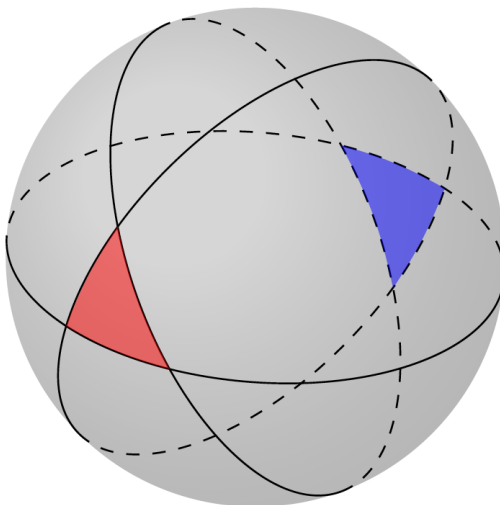


Kuva: Wikimedia Commons,
laatija nimimerkki TUBS

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Colorado_in_United_States.svg

Creative Commons Attribution-Share
Alike 3.0 Unported -lisenssi

10. Seuraavat väitteet ovat totta tasossa. Ovatko ne totta pallon pinnalla?
 - a. Kahden pisteen kautta kulkee tasan yksi suora.
 - b. Kahdella suoralla on yksi tai nolla leikkauspistettä.
11. Yllättäen kolmion pinta-alan pallon pinnalla voi laskea, kunhan tietää kolmion kulmat α , β ja γ sekä pallon säteen R . Johda tämä kaava.
(Vihje 1: pallon pinta-alan voi laskea kaavalla $A = 4\pi R^2$. Vihje 2: Aloita määrittämällä kaksikulmion pinta-alan kaava.)

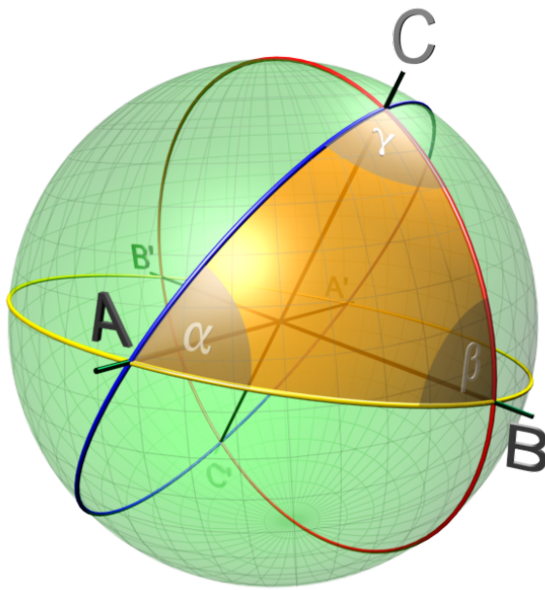


Kuva laadittu koodilla, jonka Herman
Jarmillo kirjoitti Stack Overflow -
sivustolle

<https://tex.stackexchange.com/questions/53445/how-to-draw-spherical-geometries-with-tex>

Ratkaisuja tehtäviin

1. Reitit itse asiassa ovat (suunnilleen) suoria, jos suoralla reitillä tarkoitetaan lyhintä reittiä pallon pintaa pitkin.
2. Lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee isoympyrään pitkin. Isoympyrä määritellään pallon pinnan ympyränä, jonka keskipiste on sama kuin pallolla.
3. Ympyrän pinnalla kolmio voi näyttää esimerkiksi tältä:

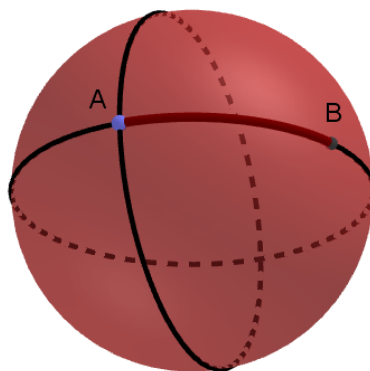


Kuva: Wikimedia Commons,
laatija Dominique Toussaint

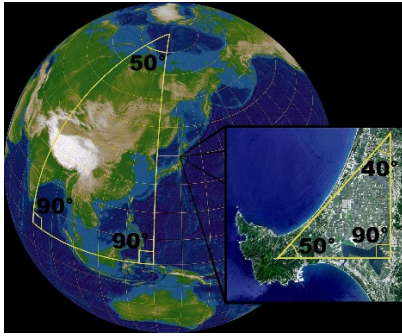
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_triangle_3d.png

GNU Free Documentation License

4. Pallon vastakkaisille puolilla olevien pisteiden (kuten pohjoisnavan ja etelänavan) välillä on äärettömän monta puolikkaan isoympyrän muotoista reittiä, jotka ovat kaikki lyhyimpiä reittejä.
5. Kaksikulmio on mahdollinen, jos sen kärkipisteet ovat vastakkaisilla puolilla palloa. Sivuina toimii kaksi isoympyrän puolikasta. (Kuvassa pisteestä A lähtee neljä kaksikulmiota.) Minkä tahansa kahden muun pisteen (kuten A ja B) kautta kulkee vain yksi isoympyrä, jolloin kaksikulmiota ei muodostu.



6. Kaksi suoraa kulmaa onnistuu hyvin (esimerkiksi yksi kärki pohjoisnavalla ja kaksi päiväntasaajalla), ja kolmekin on mahdollista, kun myös pohjoisnavalla sijaitseva kulma valitaan suoraksi.



Kuva: Wikimedia Commons,
laatija Lars H. Rohwedder

[https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry#/media/File:Triangles_\(spherical_geometry\).jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry#/media/File:Triangles_(spherical_geometry).jpg)

[CC BY-SA 3.0](#) -lisenssi

7. Kolmion kulmien summa on aina yli 180 astetta. Tätä voi havainnollistaa vertaamaa pallokolmiota ABC, jonka sivut ovat isoympyrän osia, ja kolmiota ABC, jonka sivut ovat janoja kolmiulotteisessa avaruudessa. Tarkka todistus on itse asiassa mukavin tehdä tehtävän 11 kautta, jonka tulos takaa, että kulmien summa on tasan 180 astetta täsmälleen silloin, kun kolmion ala on nolla.

Jos pidetään kiinni siitä, että kolmion sivut ovat lyhimpiä etäisyyksiä kärkien välillä, kolmio on suurimmillaan, kun kaikki kolme kärkeä ovat esim. päiväntasaajalla, mutta silloin kaikki kulmat ovat 180 asteen kulmia, ja varsinaista kolmiota ei muodostu. Kun yhtä kärkeä liikauttaa hieman pois päiväntasaajalta, kolmio muodostuu. Voidaan siis sanoa, että kolmion kulmille α , β , ja γ pätee

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ = 3 \cdot 180^\circ$$

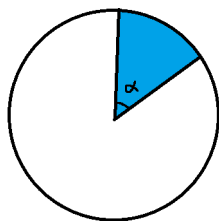
Voitaisiin tietysti pohtia lyhytsivuista kolmiota, jonka *sisäpuoli* olisi lähes koko pallo. Tällöin kulmien summan ylärajaksi tulisi $3 \cdot 360^\circ - 180^\circ = 900^\circ$. Lienee kuitenkin luontevaa määritellä, että kolmion sisäpuoli on aina pienempi niistä kahdesta alueesta, jonka kolmio rajaa - käytetäänhän samaa sopimusta myös tasossa!

8. Nelikulmion voi aina jakaa kahteen kolmioon, joten kulmien summan (saavuttamaton) alaraja on 360 astetta.
9. Pituus- ja leveyspiirit ovat kyllä kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten Coloradon kulmat ovat suorat. Coloradon ei kuitenkaan voi kutsua suorakulmioksi – eikä ylipäänsä nelikulmioksi, koska leveyspiirit eivät ole isoympyröitä ja näin ollen Coloradon kaksi sivua eivät ole pallogeometrian näkökulmista suoria janoja, vaan kaarevia.

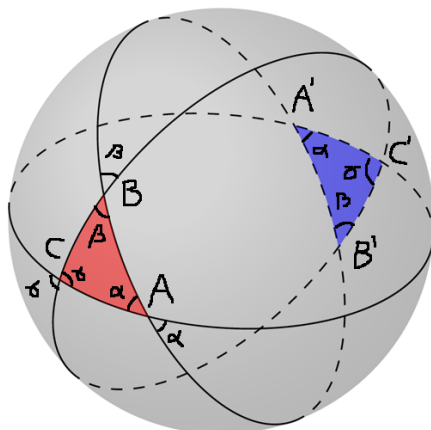
10. Ratkaisut:

- Jos ymmärretään, että ”suora” tarkoittaa tässä isoympyrää, voidaan todeta, että kahden pisteen kautta kulkee vain yksi suora siinä tapauksessa, että pisteet eivät ole vastakkaisilla puolilla palloa. Vastakkaisilla puolilla palloa olevia pisteitä yhdistää äärettömän monta isoympyrää, kuten aiemmin todettiin.
- Kahdella eri isoympyrällä on aina tasan kaksi leikkauspistettä pallon pinnalla. Yhdensuuntaisia ”suoria” ei siis ole olemassa!

11. Jos kaksikulmion kulma on suuruudeltaan α , sen pinta-ala on $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot A_{pallo}$, sillä kaksikulmio peittää tämän osuuden pallon pinnasta, kuten nähdään tarkastelemalla tilannetta suoraan kaksikulmion kärjen yläpuolelta:



Tarkastellaan sitten kolmiota ABC , jonka kulmat ovat α , β ja γ . Toiselta puolelta palloa löytyy yhtenevä kolmio $A'B'C'$.



Alkuperäinen kuva laadittu koodilla, jonka Herman Jarmillo kirjoitti Stack Overflow -sivustolle

<https://tex.stackexchange.com/questions/53445/how-to-draw-spherical-geometries-with-tex>

Kuvaan on tehty lisämerkintöjä.

Olkoot AA' , BB' ja CC' ne kaksikulmiot, joiden kulmat ovat α , β ja γ . Kumpaakin esiintyy kolmion pinnalla kaksi yhtenevää kopiota. Kun lasketaan kaikkien kuuden kaksikulmion alat yhteen, koko pallo tulee katetuksi, ja lisäksi kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ ala tulee kumpikin lasketuksi kolmeen kertaan, eli yhteensä näljä ylimääräistä kertaa. Saadaan siis

$$2A_{AA'} + 2A_{BB'} + 2A_{CC'} = A_{pallo} + 4A_{ABC},$$

eli

$$4A_{ABC} = 2A_{AA'} + 2A_{BB'} + 2A_{CC'} - A_{pallo}.$$

Kun muistetaan, että $A_{AA'} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot A_{pallo}$ ja siis $2A_{AA'} = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot A_{pallo}$ saadaan

$$4A_{ABC} = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot A_{pallo} + \frac{\beta}{180^\circ} \cdot A_{pallo} + \frac{\gamma}{180^\circ} \cdot A_{pallo} - A_{pallo}$$

$$4A_{ABC} = \left(\frac{\alpha}{180^\circ} + \frac{\beta}{180^\circ} + \frac{\gamma}{180^\circ} - 1 \right) \cdot A_{pallo}$$

Tähän voidaan vielä sijoittaa $A_{pallo} = 4\pi R^2$, jolloin saadaan

$$A_{ABC} = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{180^\circ} - 1 \right) \cdot \pi R^2.$$

Tulos on siinä mielessä yllättävä, että kolmion pinta-ala riippuu vain kolmion kulmien summasta! Sama kulmien summa takaa siis saman alan, ja päinvastoin. Lisäksi pinta-ala on suoraan verrannollinen siihen, kuinka paljon kolmion kulmien summa poikkeaa 180 asteesta.