

Puolustajan strategia liikkuvien pisteiden pelissä

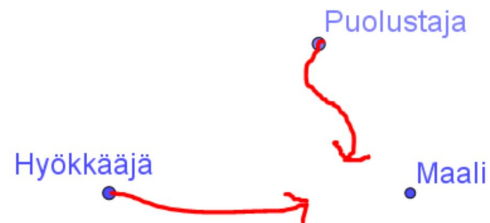
Juho Arala ja Juuso Lösönen



Mitä tutkimme?

Jääkiekossa ja monessa muussakin urheilulajissa ja tietokonepelissä, ohjusteknologiassa ja liikkuvassa maasodassa puolustaja yrittää pitää hyökkääjän mahdollisimman kaukana maalista. Miten puolustajan kannattaa liikkua suhteessa hyökkääjään, ja voiko optimaalisia luisteluratoja kuvata ja todistaa matematiikan avulla?

Tutkimme peliä, jossa hyökkääjäpisteen tavoite on liikkua mahdollisimman lähelle maalipistettä. Puolustajapiste pyrkii estämään hyökkääjän mahdollisimman kauas maalista törmäämällä hyökkääjään. Tutkimme myös pelin muunnelmia. Pelin muunnelmissa hyökkääjien ja puolustajien nopeudet, puolustajien lukumäärä, sekä metriikan ulottuvuudet muuttuvat. Tutkimuksemme käsittelee näissä peleissä puolustajien strategiaa, jolla saadaan maksimoitua turvataso eli etäisyys maalista, johon hyökkääjä voi liikkua. Ratkaisimme ja todistimme puolustajan optimaalisen strategian.



Puolustustilanne 1: Hyökkääjä ja puolustaja ovat yhtä nopeat

Lemma 1. Hyökkääjä voi aina päästä sen hetkiseen pisteeseen X sijaintiin.

Lemma 2. Pisteeseen X etäisyys maalista muuttuu nopeudella $V_P + V_H$.*

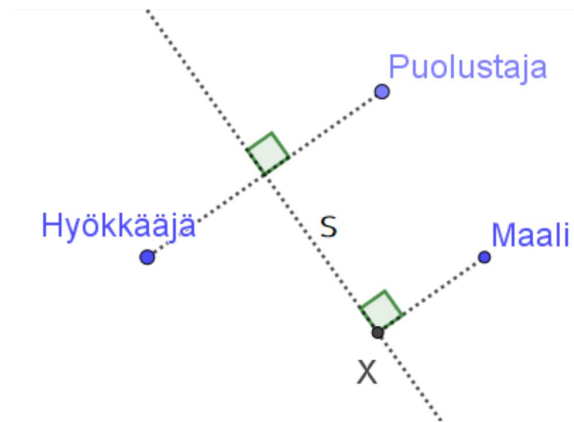
Lemma 3. Puolustaja voi liikkua niin että pisteeseen X etäisyys maalista ei pienene.

Lemma 4 eli tulos; Puolustajan paras strategia on aina hyökkääjän liikkeistä riippumatta mennä kohti sen hetkistä X:n sijaintia. Eli tällöin pisteeseen X etäisyys maalista kasvaa hyökkääjän liikkeistä riippumatta aina suurimmalla nopeudella. (V_P maksimituu)

Lemma 5. Hyökkääjän paras strategia on aina puolustajan liikkeistä riippumatta mennä kohti sen hetkistä X sijaintia. Eli tällöin V_P nopeus minimoituu.

* V_P on funktio, joka antaa janan XM pituuden muuttumisnopeuden, jos hyökkääjä on paikallaan ja puolustajan menee johonkin suuntaan tietyllä nopeudella. V_P riippuu siis puolustajan nopeudesta.

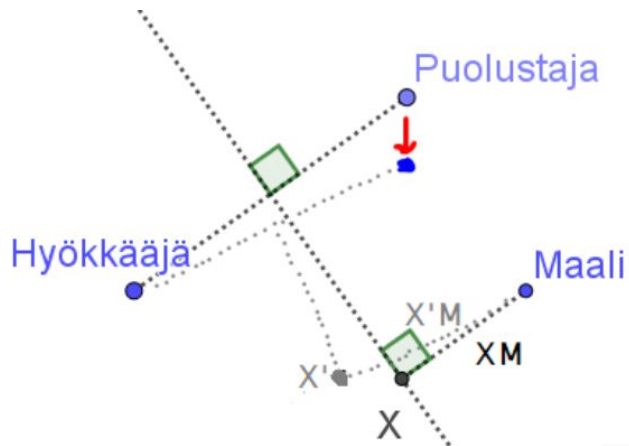
V_H on vastaava funktio, joka riippuu siis hyökkääjän nopeudesta.



Puolustajan optimaalinen strategia:

Puolustajan pitää liikkua kohti maalia lähinnä olevaa pistettä , johon hyökkääjä voi halutessaan liikkua (piste X),

koska näin turvataso eli kyseisen pisteen etäisyys maalista kasvaa hyökkääjän liikkeistä riippumatta aina suurimmalla nopeudella.



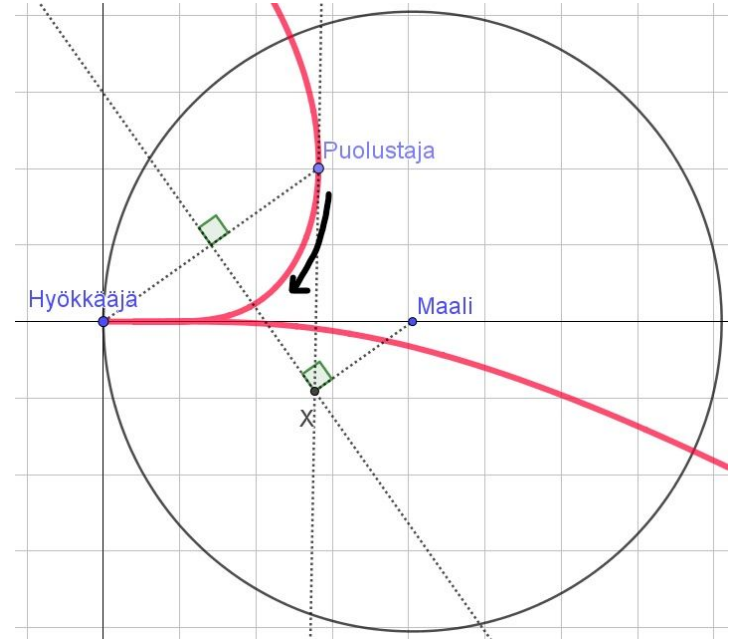
Puolustajan optimaalinen strategia on tämä sama kaikissa tutkimissamme puolustustilanteissa.

Puolustuskäyrä

Jos hyökkääjä pysyy paikallaan, puolustajan optimaalinen rata muodostaa käyrän, jonka nimesimme puolustuskäyräksi. Puolustuskäyrä voidaan esittää hyökkääjäkeskeisessä napakoordinaatistoesityksessä (a, HM) ;

$$HP = \frac{2HM}{(\ln(\sec(a) + \cot(a)) + c)}$$

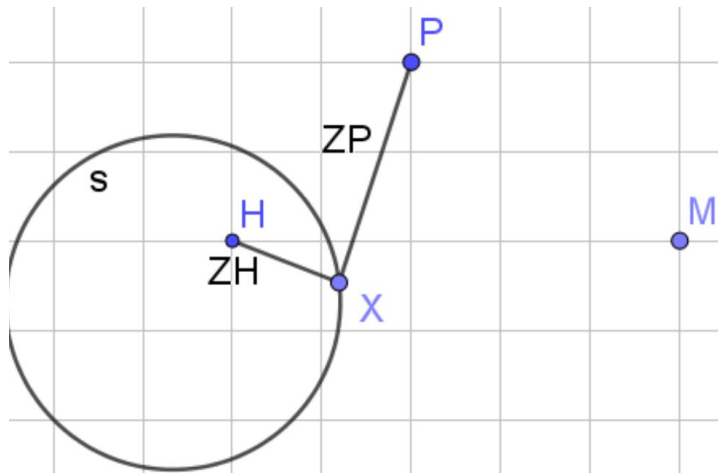
,jossa c on lähtötilanteesta riippuva vakio, a on kulma MHP.



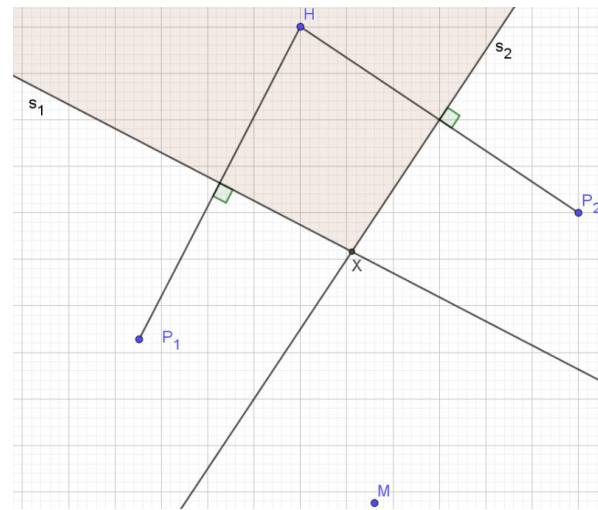
Kuvassa on punaisella puolustuskäyrä. Eli rata joka puolustajan kannattaa liikkua, kun hyökkääjä on paikoillaan.

Tutkimme myös pelin muunnelmia. Pelin muunnelmissa hyökkääjien ja puolustajien nopeudet, puolustajien lukumäärä, sekä metriikan ulottuvuudet muuttuvat. Näissä kaikissa puolustajan strategia on sama. Eli puolustajan pitää liikkua kohti maalia lähinnä olevaa pistettä (piste X), johon hyökkääjä voi halutessaan liikkua.

Kaksi esimerkkiä muista puolustustilanteista:



Puolustaja on hyökkääjää nopeampi. Nyt pisteet, joihin hyökkääjä ainakin voi liikkua ovat ympyrän sisällä. X on niistä lähinnä maalia.



Puolustajia on kaksi. Pisteet, joihin hyökkääjä voi ainakin liikkua ovat kahden puolustajan rajaaman alueen sisällä. X on alueen pisteistä lähinnä maalia. Strategian mukaan molempien puolustajien pitää liikkua kohti X:ää.

Viitteet

Johnson, R.: Advanced Euclidian geometry, Dover Publications, Inc, 1960.

Lambers, J.: math.usm.edu/lambers, (luettu 29.1.2021)

http://www.math.usm.edu/lambers/cos702/cos702_files/docs/annotate_figs/midsolve11.pdf

Nahin, P.: Chases and Escapes, the Mathematics of Pursuit and Evasion, Princeton University Press, 2007.

Tilvis, V.: Pieni peliteoriakirja, Avoimet oppimateriaalit ry, 2016.

<https://www.mayk.fi/wp-content/uploads/2017/06/peliteoria.pdf>

Kuvan pohjana kuvankaappaus Ylen lähetyksestä Jääkiekon U20 Suomi - Venäjä 2016.